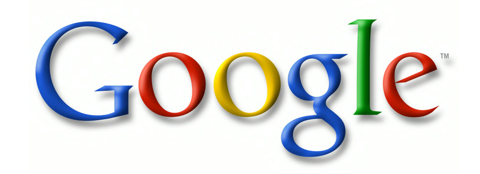
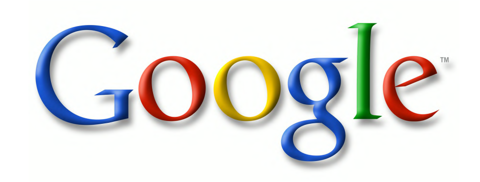



Google







ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

COMITÉ DE RÉDACTION.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

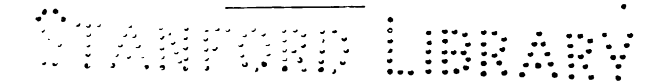
SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DU CONSEIL GÉNÉRAL DE LA HAUTE-GARONNE.

TOME X. – ANNÉE 1896.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

GROUPES DE SUBSTITUTIONS D'ORDRE DONNÉ

(SUITE ET FIN) (1),

PAR M. EDMOND MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

III.

Nous allons maintenant faire un certain nombre d'applications des théorèmes qui précèdent.

THÉORÈME I. — *Tout étant posé, comme au théorème I du* n° 1, *et* m *étant* > 1, *on ne peut avoir* $n_\alpha = 0$ *pour* $\alpha > 1$, *quel que soit* α, *que si* G *contient un groupe d'ordre* $p^\theta > 1$ *permutable à ses substitutions et formé de substitutions d'ordre p échangeables.*

Supposons qu'on ait $n_\alpha = 0$ pour $\alpha > 1$ quel que soit α.

Si $n_1 = 0$, d'après un théorème de M. Sylow déjà employé [formule (1)], G contient un groupe unique d'ordre p^m permutable à ses substitutions, et par suite, un groupe d'ordre $p^\theta > 1$ permutable à ses substitutions et formé de substitutions d'ordre p échangeables, d'après le corollaire III du théorème IV, n° 2.

Si $n_1 \neq 0$, G renferme plusieurs groupes d'ordre p^m. D'après le théo-

---

(1) Voir *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IX p. D.1.

rème I, n° 1, deux groupes différents d'ordre p^m, contenus dans G, ont en commun un groupe d'ordre p^{m-1}, sans quoi on aurait $n_\alpha \neq 0$ pour une valeur de $\alpha > 1$. Soient H, H' deux groupes différents d'ordre p^m contenus dans G, P le groupe d'ordre p^{m-1} commun. D'après le corollaire III du théorème de M. Frobenius, on sait que P est permutable aux substitutions de H et de H'; par suite, à celles du groupe dérivé (H, H'); ce dernier groupe étant contenu dans G, p^m est la plus haute puissance de p, qui divise son ordre, et, d'après un théorème de M. Sylow [formule (1)], les groupes d'ordre p^m de (H, H') sont les transformés de H par les substitutions de (H, H') et, par suite, contiennent tous P.

Soient :

H'' un groupe de G d'ordre p^m non contenu dans (H, H');
P_1 le groupe commun à H'' et H;
P_2 le groupe commun à H'' et H'.

Les groupes P_1 et P_2 sont d'ordre p^{m-1}. Je dis que H'' contient P et qu'on aura

$$P = P_1 = P_2;$$

sinon, $P \neq P_1 \neq P_2$, car si l'on avait $P_1 = P_2$, P_1 serait commun à H et H', et l'on aurait $P = P_1$. Dès lors P_1 et P_2 étant contenus dans (H, H'), il en est de même du groupe (P_1, P_2) dérivé de P_1 et de P_2; mais (P_1, P_2) est contenu dans H'' et d'ordre $> p^{m-1}$, puisque P_1 et P_2 sont différents et d'ordre p^{m-1}. Donc $(P_1, P_2) = H''$ et H'' serait contenu dans (H, H'), contrairement à l'hypothèse. Il faut, par suite, supposer que H'' contient P.

Ainsi, tous les groupes de G d'ordre p^m doivent contenir P; d'après le corollaire III du théorème IV, n° 2, on conclut encore que G renferme un groupe d'ordre $p^\theta > 1$ permutable à ses substitutions et formé de substitutions d'ordre p échangeables.

Corollaire I. — Si $m > 1$ et $n_\alpha = 0$ pour $\alpha > 1$, G ne peut être simple [1].

Corollaire II. — Si $m > 1$ et $n_\alpha = 0$ pour $\alpha > 1$, G ne peut être primitif que s'il est linéaire et de degré p^θ.

---

(1) Nous supposons toujours, pour chaque corollaire, les choses posées comme au théorème lui-même.

Ce dernier corollaire résulte de la considération du corollaire III du théorème IV, n° 2.

THÉORÈME II. — *Tout étant posé comme au théorème I du* n° 1, *soit* $m > 1$ *et supposons un groupe de* G *d'ordre* p^m *formé de substitutions échangeables; quand une au plus des quantités* n_α *est* $\neq 0$, *ou bien on aura* $n_m \neq 0$, *ou bien* G *contiendra un groupe d'ordre* $p^\theta > 1$ *permutable à ses substitutions et formé de substitutions d'ordre p échangeables.*

Le raisonnement est analogue à celui du théorème précédent; tous les groupes de G d'ordre p^m sont formés de substitutions échangeables.

Quand $n_\alpha = 0$, quel que soit α, la propriété résulte encore d'un théorème de M. Sylow [formule (1)].

Quand n_α n'est différent de o que pour une valeur de α égale à β et $\neq m$, deux groupes H et H' d'ordre p^m différents, et contenus dans G, ont en commun exactement un groupe P_β d'ordre $p^{m-\beta}$. Les substitutions de P_β étant échangeables à celles de H et de H', par suite à celles de (H, H'), on voit facilement que P_β est commun à tous les groupes d'ordre p^m de (H, H').

Enfin, un groupe H'', d'ordre p^m, contenu dans G, mais non dans (H, H'), contiendra encore P_β. Tous les groupes de G d'ordre p^m contiendront P_β et G renfermera encore un groupe d'ordre $p^\theta > 1$ permutable à ses substitutions et formé de substitutions d'ordre p échangeables.

Corollaire I. — G ne peut être simple que si $m = 1$, ou si $n_m \neq 0$, ou si deux des quantités n_α sont $\neq 0$.

Corollaire II. — G ne peut être primitif que si $m = 1$, ou si $n_m \neq 0$, ou si deux des quantités n_α sont $\neq 0$, ou si G est linéaire et de degré p^θ.

THÉORÈME III. — *Tout étant posé comme au théorème I du* n° 1, *soient* N *le degré de* G, $N - u_0$ *sa classe; si un groupe de* G *d'ordre* p^m *est formé de substitutions échangeables et si* $n_\alpha \neq 0$ *pour une valeur de* $\alpha < m$, *on aura* $u_0 \geqq p$ *ou* $N \geqq p^m(p^\alpha + 1)$.

En effet, supposons que, pour une valeur de α égale à β, on ait $n_\beta \neq 0$. Formons, comme au théorème précédent, le groupe $J = (H, H')$.

D'après la formule (10), J sera d'ordre

$$\mathfrak{Z} = p^m \nu'(1 + n'_1 p + \ldots + n'_\beta p^\beta + \ldots).$$

Les deux groupes H et H′, contenus dans J, ayant, par hypothèse, exactement les $p^{m-\beta}$ substitutions de P_β communes, on aura $n'_\beta \neq 0$, d'après le théorème I, n° 1.

Supposons qu'on puisse trouver une lettre a_1 déplacée par P_β et laissée immobile par une substitution T de J. Soit $S = (a_1, a_2, \ldots), \ldots$ une substitution de P_β; S est échangeable aux substitutions de J, puisqu'elle l'est à celles de H et de H′, et est d'ordre $\geqq p$. Les substitutions

$$T, \quad S^{-1}TS, \quad S^{-2}TS^2, \quad \ldots, \quad S^{p-1}TS^{p-1}$$

sont toutes égales, et T laisse immobiles les p lettres différentes que

$$1 = S^0, S^1, S^2, \ldots, S^{p-1}$$

substituent à a_1. On aura donc $u_0 \geqq p$.

Supposons qu'une lettre a_1, déplacée par P_β, ne soit laissée immobile par aucune substitution de J. On voit facilement que J permute transitivement a_1 avec $\mathfrak{z}$ lettres différentes $a_1, a_2, \ldots, a_{\mathfrak{z}}$; par suite, G, qui contient J, est de degré $\geqq \mathfrak{z} \geqq p^m(p^\beta + 1)$, puisque $n'_\beta \neq 0$, ce qui démontre le théorème.

Si, en particulier, β est la plus petite valeur de α pour laquelle $n_\alpha \neq 0$, on obtient même, en serrant la question d'un peu plus près, le corollaire suivant, que nous nous contenterons d'énoncer :

Corollaire. — *Si β est la plus petite valeur de α pour laquelle $n_\alpha \neq 0$, et si $p > 2$, on aura $u_0 \geqq p$ ou* $N \geqq p^m(2p^\beta + 1)$, *sauf si $p^\beta + 1 = 2^\mu$.*

Théorème IV. — *Tout étant posé comme au théorème I du* n° 1, *si* G *contient une substitution d'ordre p^m et si $m > 1$,* G *contiendra un groupe d'ordre p permutable à ses substitutions, sauf quand $n_m \neq 0$.*

Soient $m > 1$ et $n_m = 0$. Deux groupes différents H et H′ d'ordre p^m, contenus dans G, ont en commun exactement un groupe P_α, d'ordre $p^{m-\alpha}$, avec $m - \alpha > 0$. Mais H est formé des puissances d'une substitution S d'ordre p^m, et les seules substitutions d'ordre p, que H contient, sont les puissances de $S^{p^{m-1}}$. P_α, contenant une substitution d'ordre p, contient $S^{p^{m-1}}$, et cette substitution est commune à tous les groupes de G d'ordre p^m, puisque $n_m = 0$.

D'après le corollaire III du théorème IV, n° 2, G contient un groupe

d'ordre $p^\theta > 1$ permutable à ses substitutions, et formé de substitutions d'ordre p échangeables. Ce groupe d'ordre p^θ étant commun à tous les groupes de G d'ordre p^m est contenu dans H et, par suite, est formé des puissances de $S^{p^{m-1}}$. Donc $\theta = 1$.

Le raisonnement précédent ne serait pas applicable, si l'on avait $n_\alpha = 0$, quel que soit α. Mais on sait qu'alors G contient un groupe unique H, d'ordre p^m permutable à ses substitutions, et, en raisonnant comme tout à l'heure, on voit encore que G contient un groupe d'ordre p permutable à ses substitutions.

Corollaire I. — Quand $m > 1$, G ne peut être simple que si $n_m \neq 0$.

Corollaire II. — Quand $m > 1$, G ne peut être primitif que si $n_m \neq 0$.

Si, en effet, G est primitif, et si $n_m = 0$, G contient un groupe d'ordre p permutable à ses substitutions et qui, d'après un théorème de M. Jordan [1], devrait être transitif. G serait donc de degré p, et ne pourrait avoir son ordre divisible par p^m avec $m > 1$.

Corollaire III. — Si G est simple, p^m est $<$ le plus grand diviseur de $\frac{\mathcal{G}}{p^m}$ inférieur à $\frac{\mathcal{G}}{p^m}$ [théorème dû à M. O. Hölder [2]].

En effet, d'après la formule (10),

$$\mathcal{G} = p^m \nu(1 + n_1 p + \ldots + n_m p^m),$$

et $n_m \neq 0$, même quand $m = 1$ (sauf bien entendu le cas de $\mathcal{G} = p$ que nous écartons).

Si $\nu > 1$, $\frac{\mathcal{G}}{p^m}$ est divisible par $(1 + n_1 p + \ldots + n_m p^m)$, qui est $< \frac{\mathcal{G}}{p^m}$ et $> p^m$. Le corollaire a lieu.

Soit donc $\nu = 1$.

Supposons que H ne soit pas maximum dans G. Alors H est contenu dans un groupe F contenu dans G et $\mathcal{H} < \mathcal{F} < \mathcal{G}$. G, étant simple, est holoédriquement isomorphe [3] à un groupe transitif de degré $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}$, qui contient une substitution d'ordre p^m, comme G, en sorte que $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}} > p^m$, puisque $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}$

(1) *Traité des Substitutions*, p. 41.
(2) *Mathematische Annalen*, t. XL, p. 55 et suiv.
(3) W. Dyck, *Math. Annalen*, t. XXII, p. 94. — *Voir* aussi notre *Thèse de Doctorat*, p. 12.

est premier à p. Donc

$$p^m = \mathcal{K} < \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{g}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathcal{G}}{p^m} > \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{g}} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\mathcal{G}}{p^m} \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{g}}\right),$$

ce qui montre que le corollaire a encore lieu.

Supposons que H soit maximum dans G. Le groupe G est holoédriquement isomorphe à un groupe primitif G′ de degré $\frac{\mathcal{G}}{p_m}$.

G′ est de classe $\frac{\mathcal{G}}{p^m} - 1$; en effet, si cela n'a pas lieu, deux groupes H'_1, H'_2 de G′ [1], formés chacun de l'ensemble des substitutions de G′, qui laissent immobiles respectivement une lettre a'_1 ou a'_2 de G′ ne seront pas de classe $\frac{\mathcal{G}}{p^m} - 1$. H'_1 contiendra une substitution différente de l'unité et qui laissera une lettre $\neq a'_1$ immobile. Choisissons a'_2 identique à cette lettre. Les deux groupes H'_1, H'_2 auront, en commun, une substitution différente de l'unité; cette substitution sera échangeable à celles de H'_1 et de H'_2; par suite à celles du groupe dérivé (H'_1, H'_2), qui coïncide avec G′, puisque H'_1 est maximum dans G′. Ce dernier groupe ne serait donc pas simple, contrairement à l'hypothèse, et G′ est de classe $\frac{\mathcal{G}}{p^m} - 1$. Par suite, il contient exactement [2] $\frac{\mathcal{G}}{p^m} - 1$ substitutions déplaçant $\frac{\mathcal{G}}{p^m}$ lettres et régulières, qui sont d'ordre premier à p.

Il ne reste plus qu'à raisonner, comme le fait M. O. Hölder, si $\frac{\mathcal{G}}{p^m} = q^{m'}$ (q premier), G′ appartient à ce que nous avons appelé [3] la première catégorie des groupes transitifs de classe $\frac{\mathcal{G}}{p^m} - 1$ et de degré $\frac{\mathcal{G}}{p^m}$ et est composé. Sinon, soit q le plus grand diviseur premier de $\frac{\mathcal{G}}{p^m}$. D'après la formule (2),

$$\mathcal{G} = q(N_1 + 2N_2 + \ldots),$$

les groupes K et H, relatifs à cette formule (2), étant ici formés des puis-

---

(1) H'_1 et H'_2 sont tous deux de degré $\frac{\mathcal{G}}{p^m} - 1$, d'après le théorème VII, n° 2.

(2) *Voir* notre *Thèse de Doctorat*, p. 49-50.

(3) *Thèse de Doctorat*, p. 50 et 55.

sances de la même substitution de G' d'ordre q. G' renferme au moins $\frac{\mathcal{G}}{q N_1}$ groupes transformés différents de ce groupe d'ordre q, c'est-à-dire au moins $\frac{\mathcal{G}}{q N_1}(q-1)$ substitutions d'ordre q. Soit q_1 un diviseur premier de $\frac{\mathcal{G}}{p^m}$ différent de q; on aura

$$\frac{\mathcal{G}}{q N_1}(q-1) \geqq \frac{\mathcal{G}}{q N_1} q_1.$$

Mais

$$\frac{\mathcal{G}}{p^m} - 1 > \frac{\mathcal{G}}{q N_1}(q-1)$$

et

$$\frac{\mathcal{G}}{p^m} > \frac{\mathcal{G} q_1}{q N_1},$$

ou

$$\frac{\mathcal{G}}{q N_1} < \frac{\mathcal{G}}{q_1 p^m}.$$

G étant simple et renfermant un groupe d'ordre $q N_1$ est holoédriquement isomorphe (¹) à un groupe transitif de degré $\frac{\mathcal{G}}{q N_1}$; ce groupe renfermant une substitution d'ordre p^m, son degré est $\geqq p^m$ et

$$\frac{\mathcal{G}}{q N_1} \geqq p^m,$$

ce qui donne

$$p^m < \frac{\mathcal{G}}{p^m} \frac{1}{q_1}$$

et le corollaire est complètement démontré.

Théorème V. — *Tout étant posé comme au théorème I du* n° 1, *si* G *est transitif et de degré* $N \not\equiv 0 \pmod p$, *soient* H *un groupe d'ordre* p^m *de* G, *permutant les lettres qu'il déplace transitivement* p^{λ_1} *à* p^{λ_1}, p^{λ_2} *à* p^{λ_2}, ..., *et* $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \dots$: *une des quantités* n_α *avec* $\alpha \geqq \lambda_1$ *est* $\neq 0$.

En effet, on peut toujours trouver une lettre b déplacée par H, et permutée par H avec p^{λ_1} lettres; soit a une lettre non déplacée par H.

G étant transitif contient toujours une substitution de la forme

$$S = \begin{pmatrix} a, & \dots \\ b, & \dots \end{pmatrix}.$$

(¹) W. Dyck, *Math. Annalen*, t. XXII, p. 94. — *Voir* aussi notre *Thèse de Doctorat*, p. 12.

Le groupe $S^{-1}HS$, transformé de H par S, ne déplace pas b et est d'ordre p^m. Or, le groupe des substitutions de H qui laissent b immobile est d'ordre $p^{m-\lambda_1}$; donc H et $S^{-1}HS$ ont, en commun au plus, un groupe d'ordre $p^{m-\lambda_1}$, et il ne reste plus, pour établir le théorème, qu'à appliquer le théorème I du n° 1.

Si, en particulier, $\lambda_1 = m$, ce qui arrive toujours quand H a son degré égal à sa classe, on aura $n_m \neq 0$.

Remarque. — En s'appuyant sur ce théorème et sur le théorème II précédent, on retrouve des résultats compris dans le théorème I précédent.

En effet, si $\lambda_1 > 1$, le théorème I a lieu, à condition d'y supposer G transitif et $N \not\equiv 0 \pmod p$. Supposons $\lambda_1 = 1$, par suite $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$.

Soit T une substitution de H; on a

$$T = T_1 T_2 \ldots,$$

$T_1, T_2, \ldots$ étant les cycles de T, qui sont tous d'ordre p, puisque $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$.

Toute substitution T' de H, qui contient dans un de ses cycles T'_1 des lettres de T_1, par exemple, est telle que ce cycle est une puissance T_1^u de T_1; en effet, si cela n'a pas lieu, ou T'_1 ne contiendra que des lettres de T_1, et l'on déduira facilement de T et de T' une substitution contenue dans H, laissant une des lettres de T_1 immobile et en permutant entre elles quelques autres, par suite d'ordre non diviseur de $\varkappa = p^m$, ce qui est absurde; ou T'_1 contiendra à la fois des lettres de T_1 et des lettres ne faisant pas partie de T_1, ce qui exigerait $\lambda_1 > 1$ contrairement à l'hypothèse. T'_1 doit donc être une puissance T_1^u de T_1.

De plus, si $T_1, T_2, \ldots; T'_1, T'_2, \ldots; \ldots$ sont les cycles des diverses substitutions de H différentes et qui ne sont pas deux à deux puissances l'un de l'autre, ces cycles n'ont deux à deux aucune lettre commune; les substitutions circulaires $T_1, T_2, \ldots; T'_1, T'_2, \ldots; \ldots$ sont échangeables et le groupe dérivé contient H et est formé de substitutions échangeables. H est donc formé de substitutions échangeables, et l'on peut appliquer à G le théorème II précédent, ce qui conduit encore au théorème I précédent, quand on y suppose G transitif et $N \equiv 0 \pmod p$.

On conclut de là facilement ce théorème I, d'une manière générale, pour si G est simple; on n'a besoin, en effet, que de l'établir pour un holoédriquement isomorphe à G. Or, G, étant simple, est toujours

holoédriquement isomorphe à un groupe transitif G′ de degré $N \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ p)$ (¹), auquel on peut appliquer ce que nous venons de dire.

Théorème VI. — *Tout étant posé comme au théorème I du* n° 1, *soit* $N \not\equiv 0 \pmod p$ *le degré de* G *et* $N - u_0$ *sa classe. Si une seule des quantités* $N-1, N-2, \ldots, N-u_0$ *est divisible par p, on a* $n_m \neq 0$ *(ce qui doit toujours avoir lieu si* G *est transitif) ou* $v > 1$.

En effet, soit H un groupe de G d'ordre p^m, et ρp le degré de H; on a $\rho p \geqq N - u_0$, d'après la définition de la classe (²), et, par suite, ρp est l'un des nombres $N-1, N-2, \ldots, N-u_0$. Une lettre b, déplacée par H, sera permutée par H avec p^{λ_1} lettres; si $\lambda_1 < m$, le groupe des substitutions de H qui laissent b immobile est d'ordre $p^{m-\lambda_1} > 1$, de degré $\rho' p$ avec $\rho' < \rho$, et il faudrait $\rho' p > N - u_0$. Il y aura donc, parmi les nombres $N-1, N-2, \ldots, N-u_0$, au moins deux multiples de p, contrairement à l'hypothèse. Donc $\lambda_1 = m$.

b est une lettre arbitrairement choisie parmi celles que H déplace. Si l'on peut trouver une lettre a de G non déplacée par H, et telle qu'il existe une substitution

$$S = \begin{pmatrix} a, & \ldots \\ b, & \ldots \end{pmatrix}$$

dans G, on verra, en raisonnant comme au théorème précédent, que la seule substitution de H qui laisse b immobile est l'unité, que toutes les substitutions de $S^{-1}HS$ laissent b immobile, et, par suite, que H et $S^{-1}HS$ n'ont d'autre substitution commune que l'unité; ces groupes étant tous deux d'ordre p^m, on aura, d'après le théorème I du n° 1, $n_m \neq 0$. On peut remarquer d'ailleurs que S existe toujours quand G est transitif.

Si l'on ne peut trouver aucune substitution de la forme S, les lettres a, a', ... que H laisse immobiles sont déplacées par G, puisque G est de degré N, et permutées exclusivement entre elles par les substitutions de G : on voit d'abord qu'il faudra $N - 1 \not\equiv 0 \pmod p$; de plus, d'après le théorème VIII du n° 2, il faudra $v > 1$.

Théorème VII. — *Tout étant posé comme au théorème I du n°* 1, *si* G *est k fois transitif, de degré* $N \not\equiv 0$ *(mod p), de classe* $N - u_0$, *et si, de plus, il y a l multiples de p parmi les nombres* $N-1, N-2, \ldots,$

(¹) W. Dyck, *loc. cit.* — *Voir* aussi notre *Thèse de Doctorat*, p. 12 et 19.
(²) Jordan, *Théorèmes sur les groupes primitifs* (*Journal de Liouville*), 1871.

$N - u_0$, une des quantités n_α avec $\alpha \geqq \frac{l'm}{l}$ est $\neq 0$, l' étant la plus petite des trois quantités k, l et $N - \rho p$, ρp étant le degré d'un groupe H de G d'ordre p^m.

En effet, ρp est $\leqq$ au plus grand des multiples de p compris parmi les nombres $N - 1, \ldots, N - u_0$; supposons que H permute ses ρp lettres transitivement p^{λ_1} à p^{λ_1}, p^{λ_2} à p^{λ_2}, avec $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots$.

Soient b une lettre que H permute avec p^{λ_1} lettres, a une lettre que H ne déplace pas, H_1 le groupe des substitutions de H qui laissent b immobile. G étant transitif, on aura une substitution de la forme

$$S = \begin{pmatrix} a, & \ldots \\ b, & \ldots \end{pmatrix}.$$

Supposons que H_1 permute les $\rho_1 p$ lettres qu'il déplace (avec $\rho_1 < \rho$) transitivement $p^{\lambda_1^{(1)}}$ à $p^{\lambda_1^{(1)}}$, $p^{\lambda_2^{(1)}}$ à $p^{\lambda_2^{(1)}}$, ..., avec $\lambda_1^{(1)} \geqq \lambda_2^{(1)} \geqq \ldots$. Si l'on a à la fois $k > 1$, $N - \rho p > 1$ et $\varkappa_1 > 1$, on pourra toujours trouver une lettre $a_1 \neq a$ que H ne déplace pas, et une substitution de la forme S qui remplace a_1 par une lettre $b_1 \neq b$ permutée par H_1 avec $p^{\lambda_1^{(1)}}$ lettres.

En continuant de la sorte, on forme une suite de groupes H, $H_1, \ldots, H_j, \ldots, H_{t'}$; H_j permute transitivement les $\rho_j p$ lettres qu'il déplace (avec $\rho_j < \rho_{j-1} < \ldots < \rho_1 < \rho$) $p^{\lambda_1^{(j)}}$ à $p^{\lambda_1^{(j)}}$, $p^{\lambda_2^{(j)}}$ à $p^{\lambda_2^{(j)}}$, ..., avec

$$\lambda_1^{(j)} \geqq \lambda_2^{(j)} \geqq \ldots;$$

si b_j est permutée par H_j avec $p^{\lambda_1^{(j)}}$ lettres, H_{j+1} est formé de l'ensemble des substitutions de H_j qui laissent b_j immobile; si, de plus, a_j est laissée immobile par H, on peut trouver une substitution de la forme S

$$S = \begin{pmatrix} a, & a_1, & \ldots, & a_j, & \ldots \\ b, & b_1, & \ldots, & b_j, & \ldots \end{pmatrix},$$

où $a, a_1, \ldots, a_j$ sont des lettres différentes laissées immobiles par H et où $b, b_1, \ldots, b_j$ sont des lettres différentes déplacées par H. Les conditions de l'existence d'un groupe H_j et d'une substitution S jouissant des propriétés ci-dessus sont qu'on ait à la fois

$$k > j, \quad N - \rho p > j \quad \text{et} \quad \varkappa_j > 1.$$

On finira donc toujours par trouver dans la suite H, $H_1, \ldots, H_j, \ldots, H_{t'}$ un groupe $H_{t'}$ pour lequel on n'aura pas à la fois $k > t'$, $N - \rho p > t'$ et

$\mathcal{K}_{l'} > 1$. Les groupes de cette suite étant d'ailleurs de degrés ρp, $\rho_1 p$, ..., $\rho_{l'-1} p$, $\mathcal{K}_{l'}$ et chacun de ces nombres étant plus petit que le précédent, les nombres ρp, $\rho_1 p_1$, ..., $\rho_{l'-1} p$ sont des multiples de p compris parmi les nombres $N-1$, $N-2$, ..., $N-u_0$ et l'on a $l' \leqq l$.

Considérons maintenant les deux groupes $S^{-1}HS$ et H : $S^{-1}HS$ laisse b immobile, et, par suite, ne peut avoir en commun avec H que des substitutions du groupe H_1 ; $S^{-1}HS$ laisse b_1 immobile, et, par suite, ne peut avoir en commun avec H et H_1 que des substitutions du groupe H_2 ; ... ; $S^{-1}HS$ laisse $b_{l'-1}$ immobile, et, par suite, ne peut avoir en commun avec H, H_1, ..., $H_{l'-1}$ que des substitutions du groupe $H_{l'}$.

Si donc nous montrons que l'ordre $\mathcal{K}_{l'}$ de $H_{l'}$ est $\leqq p^{m\left(1-\frac{l'}{l}\right)}$, quand $\mathcal{K}_{l'} > 1$, l'application du théorème I du n° 1 donnera immédiatement notre théorème.

Or si l'on ne veut pas se préoccuper de la substitution S, c'est-à-dire des deux conditions $k > j$, $N - \rho p > j$, on peut prolonger la suite H, H_1, ..., $H_{l'}$ jusqu'à ce qu'on tombe sur un groupe $H_{m'}$ pour lequel $\mathcal{K}_{m'} = 1$. Soit

$$H, H_1, \ldots, H_l, \ldots, H_{m'}, \tag{20}$$

la nouvelle suite obtenue qui comprend la première.

D'après ce qui a été dit précédemment, on aura

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 & \geqq \lambda_2 \geqq \ldots, \\ \lambda_1^{(1)} & \geqq \lambda_2^{(1)} \geqq \ldots, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \lambda_2^{(j)} & \geqq \lambda_2^{(j)} \geqq \ldots, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \lambda_1^{(m'-1)} & \geqq \lambda_2^{(m'-1} \geqq \ldots, \end{array}\right. \tag{21}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{K} & = p^{\lambda_1} & \mathcal{K}_1, \\ \mathcal{K}_1 & = p^{\lambda_1^{(1)}} & \mathcal{K}_2, \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \mathcal{K}_j & = p^{\lambda_1^{(j)}} & \mathcal{K}_{j+1}, \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \mathcal{K}_{m'-1} & = p^{\lambda_1^{(m'-1)}} & \mathcal{K}_{m'} = p^{\lambda_1^{(m'-1)}} > 1, \end{array}\right. \tag{22}$$

puisque $\mathcal{K}_j > \mathcal{K}_{j+1}$ quel que soit j.

On tirera de là

$$\mathfrak{K} = p^{\lambda_1} p^{\lambda_1'} \dots p^{\lambda_1^{(l'-1)}} \mathfrak{K}_{l'} = p^m$$

et

$$\mathfrak{K}_{l'} = p^{\lambda_1^{(l')}} \dots p^{\lambda_1^{(m'-1)}}.$$

De plus,

$$\lambda_1 \geqq \lambda_1' \geqq \dots \geqq \lambda_1^{(l'-1)} \geqq \lambda_1^{(l')} \dots \geqq \lambda_1^{(m'-1)}.$$

On en déduit facilement

$$\mathfrak{K}_{l'} \leqq p^{m\left(1-\frac{l'}{m'}\right)}.$$

Or on peut voir qu'on a $m' \leqq l$ comme on a vu $l' \leqq l$; donc

$$\mathfrak{K}_{l'} \leqq p^{m\left(1-\frac{l'}{l}\right)}.$$

Nous avons vu qu'alors le théorème a lieu.

On remarquera, d'après ce qui précède, que, si $\mathfrak{K}_{l'} = 1$, $l' = m'$ et $\alpha = m$: si $l' = k$, $\alpha \geqq \frac{k}{l} m$; si $l' = N - \rho p$, $\alpha \geqq \frac{N - \rho p}{l} m$.

En appliquant ce théorème pour divers cas, on en déduit de nombreux corollaires: nous citerons les suivants:

Corollaire I. — Si G est transitif avec $N \not\equiv 0 \pmod{p}$, et si parmi les nombres $N-1$, $N-2$, ..., $N-u_0$ il n'y en a qu'un qui soit divisible par p, il faut $n_m \neq 0$.

Corollaire II. — Si G est transitif avec $N \not\equiv 0 \pmod{p}$, et si parmi les nombres $N-1$, $N-2$, ..., $N-u_0$ il n'y en a que deux qui soient divisibles par p, une des quantités n_α avec $\alpha \geqq \frac{m}{2}$ est $\neq 0$; si en même temps G est deux fois transitif et $N-1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, il faut $n_m \neq 0$.

Le théorème VII est d'ailleurs une extension du théorème V précédent.

Applications.

Les théorèmes qui précèdent permettent de traiter complètement l'application de la formule (10) au cas où $m = 2$.

Soit p^2 la plus haute puissance de p (p étant premier), qui divise l'ordre g d'un groupe G. On sait, d'après un des théorèmes de M. Sylow (1),

(1) Mémoire déjà cité, p. 587.

qu'un groupe H de G d'ordre p^2 est formé de substitutions échangeables. Nous pouvons donc alors appliquer en particulier les théorèmes II et III.

THÉORÈME VIII. — *Soit p^2 la plus haute puissance du nombre premier p qui divise l'ordre $\mathcal{G}$ d'un groupe* G; *on aura*

$$\mathcal{G} = p^2 \nu (1 + n_1 p + n_2 p^2).$$

Si $n_2 = 0$, G *contiendra un groupe d'ordre p ou p^2 permutable à ses substitutions et ne pourra être primitif que s'il est linéaire et de degré p^2.*

Si $n_1 \neq 0$ et $p > 2$, N *étant le degré de* G, *et* $N - u_0$ *sa classe, on aura, soit $u_0 \geqq p$ ou $N \geqq p^2(2p+1)$ quand $p + 1 \neq 2^\mu$, soit $u_0 \geqq p$ ou $N \geqq p^2(p+1)$ quand $p + 1 = 2^\mu$.*

Corollaire I. — Si G est simple, on a $n_2 \neq 0$.

Corollaire II. — Si G est degré ρp^2 $(p > 2)$ avec $\rho < p$, on aura $u_0 \geqq p$, quand $n_1 \neq 0$.

On pourrait déduire encore des théorèmes précédents d'autres propriétés pour le groupe G; nous n'insisterons pas.

Énonçons encore le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Pour un groupe* G *transitif de degré p^3 et de classe $p^3 - u_0$ avec $u_0 < p$ la formule* (10) *se réduit à*

$$\mathcal{G} = p^3 \nu (1 + n_3 p^3).$$

On peut surtout appliquer avec fruit les théorèmes qui précèdent dans l'étude des groupes primitifs G de degré N et de classe $N - u_0$, quand u_0 a une valeur donnée, car le plus grand nombre des théorèmes précédents est applicable aux nombres premiers diviseurs de $\mathcal{G}$ qui sont $> u_0$. Voici des exemples :

THÉORÈME X. — *ρ étant donné, un groupe primitif* G *de classe* $N - 2$ *et de degré* $N = \rho p^2$ *(p premier) ne peut exister en général que s'il est deux fois transitif et si $\rho p^2 = q^m + 1$ (q premier).*

Les exceptions n'ont lieu que pour des valeurs de p limitées en fonction de ρ.

Nous considérerons seulement le cas de $\rho = 1$; la démonstration est la même, quel que soit ρ, en supposant $p > \rho$ et $p > 2$.

Quand $p > 2$ et $\rho = 1$, on peut appliquer à G le théorème VIII précédent et son corollaire II. On a

$$\mathcal{G} = p^2 \nu (1 + n_2 p^2).$$

Si $n_2 = 0$, G n'est pas de classe $p^2 - 2$, puisque alors G étant primitif est linéaire et de degré p^2.

Soit $n_2 > 0$. D'après le corollaire du théorème II, n° 1, $\mathcal{G}$ divise $p^2(p^2-1)(p^2-2)$ et l'on peut écrire

$$p^2 \nu(1+n_2 p^2)\, l = p^2(p^2-1)(p^2-2),$$

d'où

$$l\nu(1+n_2 p^2) = (p^2-1)(p^2-2),$$

$$l\nu \equiv 2 \pmod{p^2} \qquad \text{ou} \qquad l\nu = 2 + \lambda p^2,$$

ce qui donne

$$(2+\lambda p^2)(1+n_2 p^2) = (p^2-1)(p^2-2).$$

Or si $\lambda > 0$, le premier membre est supérieur à p^4 et le deuxième inférieur à p^4, puisque $n_2 > 0$, et l'égalité précédente est impossible.

Soit $\lambda = 0$.

$$2(1+n_2 p^2) = (p^2-1)(p^2-2)$$

et $l\nu = 2$.

Si $l = 1$, $\nu = 2$, G est trois fois transitif, puisque son ordre est

$$p^2(p^2-1)(p^2-2),$$

son degré p^2 et sa classe $p^2 - 2$ (théorème III, n° 1 et corollaire); si $l = 2$,

$$\nu = 1, \quad \mathcal{G} = \frac{p^2(p^2-1)(p^2-2)}{2}.$$

Or on sait (1) que l'ordre d'un groupe transitif de degré p^2 et de classe $p^2 - 2$ est de la forme

$$\mathcal{G} = p^2(\mathcal{K}\sigma + 1)\mathcal{K},$$

où $\mathcal{K}$ est l'ordre du groupe des substitutions qui laissent deux lettres immobiles, $\mathcal{K}$ divisant $p^2 - 2$ et $\mathcal{K}\sigma + 1$ divisant $p^2 - 1$. Dès lors $\mathcal{K}$ est le plus grand commun diviseur de $\frac{\mathcal{G}}{p^2}$ et $p^2 - 2$, puisque p est impair, et l'on aurait

$$\mathcal{K} = p^2 - 2, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{K}\sigma + 1 = \frac{p^2-1}{2},$$

résultat évidemment absurde.

On doit donc supposer $l = 1$, $\nu = 2$ et G trois fois transitif. On sait (2)

(1) *Voir* notre *Thèse de Doctorat*, p. 69-70.

(2) JORDAN, *Recherches sur les substitutions* (*Journal de Liouville*; 1872).

qu'il faut $p^2 - 1 = q^\mu$, q étant un nombre premier; p étant impair, il faut

$$p^2 - 1 = (p+1)(p-1) = 2^\mu = 2^3 \quad \text{et} \quad p = 3.$$

Donc :

Corollaire. — Un groupe de degré p^2 (p premier impair) et de classe $p^2 - 2$ primitif est trois fois transitif et de degré 9.

En appliquant de même le théorème IX aux groupes primitifs de degré p^3 et de classe $p^3 - 2$, on verrait qu'on doit avoir $p^3 - 1 = 2^\mu$ quand p est impair; or $p^3 - 1 = (p^2 + p + 1)(p - 1)$ ne peut être égal à 2^μ puisque $p^2 + p + 1 =$ un nombre impair quand p est impair. Donc :

Théorème XI. — *Il n'existe aucun groupe primitif de degré p^3 (p premier impair) et de classe $p^3 - 2$.*

Théorème XII. — *Soit* G *un groupe transitif de degré ρp (p premier et $\rho < p$), de classe $\rho p - u_0$ (avec $u_0 < p$); dans la formule* (1) *de M. Sylow qui correspond à* G, *si $n > 0$, p est limité supérieurement en fonction de ρ, u_0 et n.*

D'après la formule (1) de M. Sylow

$$\mathcal{G} = p\nu(np+1) \quad \text{et} \quad n > 0$$

par hypothèse.

D'après le corollaire du théorème II, n° 1, G divise le produit

$$\rho p(\rho p - 1)(\rho p - 2)\ldots(\rho p - u_0),$$

et $np + 1$ divise le produit

$$\rho(\rho p - 1)(\rho p - 2)\ldots(\rho p - u_0).$$

Soit δ le plus petit commun multiple de ρ et de n : un diviseur commun à $\rho p - j$ et à $np + 1$ est un diviseur commun à $\frac{\delta}{\rho}(\rho p - j)$ et $\frac{\delta}{n}(np + 1)$. Le plus grand commun diviseur de $\rho p - j$ et $np + 1$ divise donc $\frac{\delta}{\rho}(\rho p - j)$ et $\frac{\delta}{n}(np + 1)$, et, par suite, leur différence

$$\frac{\delta}{n} + \delta \frac{j}{\rho} = \delta\left(\frac{1}{n} + \frac{j}{\rho}\right).$$

Le plus grand commun diviseur de

$$np + 1 \qquad \text{et} \qquad \rho(\rho p - 1)(\rho p - 2)\ldots(\rho p - u_0),$$

qui est $np + 1$, divisera le produit

$$\rho^{\rho}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{\rho}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{u_0}{\rho}\right),$$

en sorte que

$$[illegible] \left(\frac{1}{n}-\frac{2}{\rho}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{u_0}{\rho}\right),$$

ce qui montre le théorème.

En particulier quand ρ [illegible] on a $\rho = n$, et $np + 1$ doit diviser le produit

$$[illegible] \ldots 2, n - 1).$$

Remarque I. — On peut établir un théorème analogue pour un groupe G remplissant toutes les conditions énoncées au théorème ci-dessus, sauf celle d'être transitif, à condition que ce groupe G ait son ordre divisible par p.

Remarque II. — Le théorème VIII et ses corollaires permettent d'établir un théorème analogue pour les groupes de degré ρp^2 (p premier et $\rho < p$), de classe $\rho p^2 - u_0$ (avec $u_0 < p$).

Remarque III. — Le théorème IX permet d'établir un théorème analogue pour les groupes de degré p^3 (p premier) transitifs, de classe $p^3 - u_0$ (avec $u_0 < p$).

[illegible] mai 1894.

SUR LA

PROPAGATION DES ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES,

PAR P. DUHEM,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

INTRODUCTION.

Le présent travail fait suite au troisième Volume de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* et aux divers Mémoires, relatifs à l'Électrodynamique, que nous avons publiés dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. Il a pour but, comme les recherches dont nous venons de parler, de relier entre elles, d'une manière entièrement logique, les découvertes les plus récentes faites dans le domaine de l'Électrodynamique, en particulier par Maxwell et par Helmholtz. Ce sont les idées fondamentales de ce dernier physicien que nous suivons, à l'exclusion des doctrines nouvelles introduites depuis quelques années dans l'étude de l'électricité.

Parmi les conséquences du travail que nous publions aujourd'hui, il en est une sur laquelle nous voulons attirer l'attention; elle concerne la théorie électromagnétique de la lumière.

La théorie de la lumière, qui, depuis Young et Fresnel, a possédé la faveur des physiciens, est la théorie qui attribue la lumière aux vibrations transversales d'un corps élastique hypothétique, l'éther. On sait que cette théorie se heurte à des difficultés insurmontables lorsqu'elle se propose de traiter la réflexion et la réfraction de la lumière.

La théorie de l'élasticité permet aisément de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction, à la surface plane qui sépare deux milieux, d'une onde incidente plane propageant des vibrations transversales.

Quand les vibrations incidentes sont perpendiculaires au plan d'incidence, le mouvement réfléchi et le mouvement réfracté se composent chacun d'une onde plane unique propageant des vibrations transversales normales au plan d'incidence; les lois des vibrations réfléchies et réfractées

s'expriment par des formules semblables à celles que Fresnel a données pour la réflexion et la réfraction de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

Mais, lorsque les vibrations incidentes sont dans le plan d'incidence, les lois de l'élasticité montrent que le mouvement réfléchi et le mouvement réfracté ne peuvent plus, en général, être composés de vibrations exclusivement transversales, en sorte que ce cas ne peut s'accorder avec les formules de l'Optique. Ce désaccord suffit, en bonne logique, pour faire rejeter l'assimilation de la lumière aux vibrations transversales d'un solide élastique.

Il était naturel de se demander si la théorie électromagnétique de la lumière se heurtait à des difficultés analogues, ou bien, au contraire, si cette théorie donnait, pour la réflexion et la réfraction d'une onde électromagnétique plane propageant une perturbation transversale, des formules analogues à celles qui régissent la réflexion et la réfraction de la lumière. Si ce dernier cas se réalisait, la théorie électromagnétique de la lumière aurait, sur la théorie élastique, un grand avantage.

Maxwell n'avait pas traité le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques à la surface de séparation de deux milieux. Ce problème a été traité pour la première fois par M. Potier, dans une Note (1) adjointe à la traduction française du *Treatise* de Maxwell.

M. Potier arrivait à cette conclusion que les formules, qui règlent la réflexion et la réfraction des ondes électromagnétiques planes à la surface de séparation de deux diélectriques, coïncidaient avec les formules qui expriment, selon Fresnel, les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux substances transparentes. Les lois de la réflexion d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur s'exprimaient au moyen des formules de la réflexion métallique indiquées par Cauchy. M. Potier ajoutait : « L'identité des formules déduites de la théorie de Maxwell avec les formules vérifiées par l'expérience, en ce qui concerne les vibrations lumineuses, est un argument de grande importance en faveur de cette théorie. »

La solution, donnée par M. Potier, du problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques a été acceptée par la plupart des auteurs. En particulier, elle a été reproduite par M. Volkmann (2).

(1) Tome II, p. 507.
(2) VOLKMANN, *Vorlesungen über die Theorie des Lichtes*, p. 298.

M. Volkmann ajoutait : « Les conditions aux limites de la théorie électromagnétique, à l'instar de celles que fournit la théorie de Mac Cullagh, ont un avantage sur les conditions aux limites acceptées par la théorie vibratoire de la lumière; elles résultent directement de principes mécaniques, sans avoir à faire appel à des conditions accessoires particulières. Nous devons en conclure que la théorie électromagnétique de la lumière l'emporte sur la théorie élastique. »

Mais les conditions aux limites adoptées par M. Potier, par Hertz, par M. Cohn, par M. Volkmann, avaient été établies en s'appuyant sur des propositions douteuses et sujettes à litige de Maxwell, ou de ses continuateurs, tel que M. Poynting; ces conditions étaient donc fort douteuses et il nous a paru nécessaire d'en reprendre la démonstration. Nous avons été ainsi conduit, *toujours dans les idées de Helmholtz,* à remplacer ces conditions par d'autres relations très différentes de forme et dont les conséquences s'écartent beaucoup de celles qu'avait obtenues M. Potier.

D'après ces nouvelles conditions limites, lorsqu'une onde électromagnétique plane, propageant une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence, tombe sur la surface plane qui sépare deux milieux diélectriques, il y a une seule onde plane réfléchie et une seule onde plane réfractée; chacune d'elles propage une force électromotrice transversale et perpendiculaire au plan d'incidence; les formules qui lient la force réfléchie et la force réfractée à la force incidente sont identiques aux formules qui, selon Fresnel, lient la vibration réfléchie et la vibration réfractée à la vibration incidente, quand la lumière incidente est polarisée dans le plan d'incidence.

Mais, lorsque l'onde incidente propage une force électromotrice transversale située dans le plan d'incidence, il n'est plus possible d'accorder les conditions aux limites par nous obtenues avec l'existence d'une seule onde réfléchie et d'une seule onde réfractée, propageant toutes deux une force électromotrice transversale.

La théorie électromagnétique de la lumière se heurte donc à des contradictions tout à fait analogues à celles que rencontre la théorie élastique; l'une comme l'autre est logiquement inacceptable; l'une comme l'autre doit être reléguée au nombre de ces hypothèses chimériques qui ont sollicité les efforts des chercheurs et grandement contribué au progrès de la Physique, mais que la Physique rejette lorsqu'elle a cessé de s'en servir.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

I. — *Variables qui représentent l'état électrique et magnétique d'un système.*

Si un corps est électrisé, chaque élément de volume $d\varpi$, tracé en une région où la constitution de ce corps varie d'une manière continue, renferme une quantité d'électricité $e\,d\varpi$; chaque élément d'aire dS, tracé sur la surface qui limite ce corps, ou bien sur une surface de discontinuité qui le divise, renferme une quantité d'électricité $E\,dS$; e est la *densité électrique solide* en un point de l'élément $d\varpi$; E est la *densité électrique superficielle* en un point de l'élément dS.

Si un corps diélectrique est polarisé, l'*intensité de la polarisation*, en un point de ce diélectrique, sera représentée par $\mathfrak{M}$; les *composantes de la polarisation* seront représentées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Si un corps est aimanté, l'*intensité d'aimantation*, en un point de ce corps, sera représentée par μ; les *composantes de l'aimantation* seront représentées par α, β, γ.

Si un corps est traversé par des courants de conduction, les *composantes du flux de conduction*, en un point de ce corps, seront représentées par u, v, w.

Ces variables ne sont pas entièrement indépendantes des variables e et E.

En un point au voisinage duquel la constitution du conducteur varie d'une manière continue, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Supposons qu'une surface S sépare deux parties 1 et 2 du conducteur, ces deux parties ayant des natures différentes. Soit M un point de la surface S. Soient n_1, n_2 les deux demi-normales menées, en ce point, à la surface S, l'une vers l'intérieur du corps 1, l'autre vers l'intérieur du

corps 2. On a

$$(2)\qquad \begin{aligned} &u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)\\ &+u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)+\frac{\partial E}{\partial t}=0. \end{aligned}$$

Si un diélectrique est le siège de flux de déplacement, les *composantes*, en un point, *du flux de déplacement* seront représentées par φ, ψ, χ. On a, par définition,

$$(3)\qquad \varphi=\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t},\qquad \psi=\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t},\qquad \chi=\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}.$$

II. — *Fonctions potentielles.*

L'étude des actions exercées par l'électricité conduit à étudier la *fonction potentielle électrostatique*

$$(4)\qquad V(\xi,\eta,\zeta)=\int\frac{e}{r}\,d\varpi+\int\frac{E}{r}\,dS,$$

où r est la distance, soit de l'élément $d\varpi$, soit de l'élément dS, au point (ξ, η, ζ);

Où la première intégrale s'étend à tous les éléments de volume du système;

Où la seconde intégrale s'étend à tous les éléments des surfaces de discontinuité que le système renferme.

La *fonction potentielle diélectrique* est la fonction

$$(5)\qquad \mathcal{V}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi,$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'élément de volume $d\varpi$, et l'intégration s'étendant à tous les éléments de volume du système.

La *fonction potentielle magnétique* est la fonction

$$(6)\qquad \mathfrak{s}(\xi,\eta,\zeta)=\int\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi.$$

L'étude des actions exercées par les courants de conduction conduit à

envisager les fonctions

$$(7)\quad\begin{cases}\mathfrak{U}(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\xi-x}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}u+\frac{\eta-y}{r}v+\frac{\zeta-z}{r}w\right)\right]d\varpi,\\ \mathfrak{V}(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{v}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\eta-y}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}u+\frac{\eta-y}{r}v+\frac{\zeta-z}{r}w\right)\right]d\varpi,\\ \mathfrak{W}(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{w}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\zeta-z}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}u+\frac{\eta-y}{r}v+\frac{\zeta-z}{r}w\right)\right]d\varpi.\end{cases}$$

L'étude des actions exercées par les courants de déplacement conduit de même à envisager les fonctions

$$(8)\quad\begin{cases}\mathfrak{F}(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\varphi}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\xi-x}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\varphi+\frac{\eta-y}{r}\psi+\frac{\zeta-z}{r}\chi\right)\right]d\varpi,\\ \mathfrak{G}(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\psi}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\eta-y}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\varphi+\frac{\eta-y}{r}\psi+\frac{\zeta-z}{r}\chi\right)\right]d\varpi,\\ \mathfrak{H}(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\chi}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\zeta-z}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\varphi+\frac{\eta-y}{r}\psi+\frac{\zeta-z}{r}\chi\right)\right]d\varpi.\end{cases}$$

Dans ces formules, λ est une constante numérique que nous nommerons la *constante de Helmholtz*.

Les actions exercées par les aimants, soit sur les courants de conduction, soit sur les courants de déplacement, introduisent les fonctions

$$(9)\quad\begin{cases}\Phi(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left(\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi,\\ \Psi(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi,\\ \mathrm{X}(\xi,\eta,\zeta)=\displaystyle\int\left(\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi.\end{cases}$$

Les actions exercées par les courants de conduction sur les aimants conduisent à considérer les fonctions

qui peuvent s'écrire plus explicitement

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{P}(\xi,\eta,\zeta) = -\displaystyle\int\left(w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi, \\ \mathrm{Q}(\xi,\eta,\zeta) = -\displaystyle\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi, \\ \mathrm{R}(\xi,\eta,\zeta) = -\displaystyle\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi. \end{cases}$$

Les actions exercées par les courants de déplacement sur les aimants conduisent à considérer les fonctions

$$(12)\quad \begin{cases} p(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\eta} - \dfrac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\zeta}, \\ q(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\zeta} - \dfrac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\xi}, \\ r(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\xi} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\eta}, \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire, plus explicitement, de la manière suivante :

$$(13)\quad \begin{cases} p(\xi,\eta,\zeta) = -\displaystyle\int\left(\chi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi, \\ q(\xi,\eta,\zeta) = -\displaystyle\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \chi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi, \\ r(\xi,\eta,\zeta) = -\displaystyle\int\left(\psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi. \end{cases}$$

III. — *Propriétés des fonctions potentielles en un point au voisinage duquel l'état du système varie d'une manière continue.*

Dorénavant, nous désignerons non plus par (ξ,η,ζ), mais par (x,y,z), le point auquel se rapportent nos fonctions potentielles. En outre, nous désignerons, suivant l'usage, par le symbole Δ, l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On sait que l'on a

$$(14)\qquad \Delta V = -4\pi e,$$

$$(15)\qquad \Delta \mathfrak{V} = 4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right),$$

$$(16)\qquad \Delta \mathcal{S} = 4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

A ces relations, connues depuis Poisson, on peut joindre les suivantes, qui sont dues à Helmholtz :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta \mathcal{U} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} = -4\pi u,\\ &\Delta \mathcal{V} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t} = -4\pi v,\\ &\Delta \mathcal{W} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t} = -4\pi w,\end{aligned}\right.$$

$$(18)\qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} + \lambda\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

On a, de même :

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta \mathfrak{F} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\,\partial t} = -4\pi\varphi,\\ &\Delta \mathfrak{G} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y\,\partial t} = -4\pi\psi,\\ &\Delta \mathfrak{H} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z\,\partial t} = -4\pi\chi.\end{aligned}\right.$$

$$(20)\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} = 0.$$

Les fonctions Φ, Ψ, X vérifient les équations suivantes :

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\Phi = 4\pi\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right),\\ &\Delta\Psi = 4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right),\end{aligned}\right.$$

Les fonctions P, Q, R vérifient les équations suivantes :

$$
(23)\quad \begin{cases} \Delta P = -4\pi\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \Delta Q = -4\pi\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \Delta R = -4\pi\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}
$$

$$
(24)\quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.
$$

Les fonctions p, q, r vérifient les équations suivantes :

$$
(25)\quad \begin{cases} \Delta p = -4\pi\left(\dfrac{\partial \chi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\right), \\ \Delta q = -4\pi\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial \chi}{\partial x}\right), \\ \Delta r = -4\pi\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \end{cases}
$$

$$
(26)\quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.
$$

IV. — *Propriétés des fonctions potentielles en un point de la surface de contact de deux corps différents.*

Soient :

1 et 2 les deux corps en contact le long de la surface S;
M un point de la surface S;
n_1, n_2 les deux demi-normales menées, par ce point, à la surface S et dirigées respectivement vers l'intérieur du corps 1 et vers l'intérieur du corps 2;
T une demi-tangente menée par le point M à la surface S.

Si une fonction $f(x, y, z)$, ayant, pour les deux corps 1 et 2, la même signification *physique*, a, en ces deux corps, des expressions *analytiques* différentes, nous désignerons ces deux expressions par $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$.

Cela posé, nous aurons, en tout point de la surface S,

$$V_1 = V_2, \tag{27}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = -4\pi E. \tag{28}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial T} = \frac{\partial V_2}{\partial T}. \tag{29}$$

Nous aurons aussi

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2. \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial n_2} = 4\pi[\ & \mathcal{A}_1 \cos(n_1, x) + \mathcal{B}_1 \cos(n_1, y) + \mathcal{C}_1 \cos(n_1, z) \\ & + \mathcal{A}_2 \cos(n_2, x) + \mathcal{B}_2 \cos(n_2, y) + \mathcal{C}_2 \cos(n_2, z)],\end{aligned} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial T} \tag{32}$$

et, de même,

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial n_2} = 4\pi[\ & \alpha_1 \cos(n_1, x) + \beta_1 \cos(n_1, y) + \gamma_1 \cos(n_1, z) \\ & + \alpha_2 \cos(n_2, x) + \beta_2 \cos(n_2, y) + \gamma_2 \cos(n_2, z)],\end{aligned} \tag{34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial T}. \tag{35}$$

Les fonctions $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ vérifient les égalités suivantes :

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2, \qquad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2, \qquad \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_2, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial n_2} = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{v}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial T}. \tag{38}$$

Les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ vérifient les égalités suivantes :

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2, \qquad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2, \qquad \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2, \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial n_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial n_2} = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{G}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial T} = \frac{\partial \mathfrak{H}_2}{\partial T} \tag{41}$$

Les fonctions Φ, Ψ, X vérifient les égalités suivantes :

$$(42)\qquad \Phi_1 = \Phi_2, \qquad \Psi_1 = \Psi_2, \qquad X_1 = X_2,$$

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} = 4\pi[\gamma_1 \cos(n_1, y) - \beta_1 \cos(n_1, z) + \gamma_2 \cos(n_2, y) - \beta_2 \cos(n_2, z)], \\ \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial n_2} = 4\pi[\alpha_1 \cos(n_1, z) - \gamma_1 \cos(n_1, x) + \alpha_2 \cos(n_2, z) - \gamma_2 \cos(n_2, x)], \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial X_2}{\partial n_2} = 4\pi[\beta_1 \cos(n_1, x) - \alpha_1 \cos(n_1, y) + \beta_2 \cos(n_2, x) - \alpha_2 \cos(n_2, y)]. \end{cases}$$

$$(44)\qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial T} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial T} = \frac{\partial X_2}{\partial T}.$$

Les fonctions P, Q, R vérifient les égalités suivantes :

$$(45)\qquad P_1 = P_2, \qquad Q_1 = Q_2, \qquad R_1 = R_2.$$

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial P_2}{\partial n_2} = -4\pi[w_1 \cos(n_1, y) - v_1 \cos(n_1, z) + w_2 \cos(n_2, y) - v_2 \cos(n_2, z)], \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial Q_2}{\partial n_2} = -4\pi[u_1 \cos(n_1, z) - w_1 \cos(n_1, x) + u_2 \cos(n_2, z) - w_2 \cos(n_2, x)], \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial R_2}{\partial n_2} = -4\pi[v_1 \cos(n_1, x) - u_1 \cos(n_1, y) + v_2 \cos(n_2, x) - u_2 \cos(n_2, y)], \end{cases}$$

$$(47)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial T} = \frac{\partial P_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial T} = \frac{\partial Q_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial R_1}{\partial T} = \frac{\partial R_2}{\partial T}.$$

Enfin, les fonctions p, q, r vérifient les égalités suivantes :

$$(48)\qquad p_1 = p_2, \qquad q_1 = q_2, \qquad r_1 = r_2,$$

$$(49)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial p_2}{\partial n_2} = -4\pi[\chi_1 \cos(n_1, y) - \psi_1 \cos(n_1, z) + \chi_2 \cos(n_2, y) - \psi_2 \cos(n_2, z)], \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial q_2}{\partial n_2} = -4\pi[\varphi_1 \cos(n_1, z) - \chi_1 \cos(n_1, x) + \varphi_2 \cos(n_2, z) - \chi_2 \cos(n_2, x)], \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial r_2}{\partial n_2} = -4\pi[\psi_1 \cos(n_1, x) - \varphi_1 \cos(n_1, y) + \psi_2 \cos(n_2, x) - \varphi_2 \cos(n_2, y)], \end{cases}$$

$$(50)\qquad \frac{\partial p_1}{\partial T} = \frac{\partial p_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial T} = \frac{\partial q_2}{\partial T}, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial T} = \frac{\partial r_2}{\partial T}.$$

V. — *Constantes fondamentales.*

La constante fondamentale des actions électrostatiques sera désignée par ε. La constante fondamentale des actions électrodynamiques s'exerçant *entre courants de conduction* sera désignée par $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$. La constante fondamentale des actions électrodynamiques s'exerçant *entre courants de déplacement* sera désignée par $\frac{\mathfrak{C}^2}{2}$.

En général, avec Maxwell, on suppose que ces deux constantes sont identiques :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}. \tag{51}$$

Nous avons montré ailleurs [1] que *cette égalité était inadmissible.*

VI. — *Diverses combinaisons linéaires des fonctions précédentes.*

Nous rencontrerons souvent les combinaisons linéaires suivantes des variables $u, v, w, \varphi, \psi, \chi$:

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\varphi, \\ \mathfrak{v} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\psi, \\ \mathfrak{w} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\chi. \end{aligned}\right.$$

Dans l'hypothèse inadmissible exprimée par l'égalité (51), les quantités $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ se réduisent aux produits, par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$, des quantités $(u + \varphi)$, $(v + \psi)$, $(w + \chi)$ que Maxwell nomme *composantes du flux total.*

Nous poserons de même

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,V + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{V}. \tag{53}$$

---

[1] *Quelques remarques au sujet de l'électrodynamique des corps diélectriques proposée par* J. CLERK MAXWELL. (*Comptes rendus du troisième Congrès scientifique international des Catholiques*, séance du 5 septembre 1894.)

Dans l'hypothèse inadmissible exprimée par l'égalité (51), la quantité $\mathfrak{W}$ se réduit au produit, par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$, de la fonction potentielle électrostatique totale $(V + \mathfrak{V})$.

Nous rencontrerons souvent, dans ce qui va suivre, les combinaisons suivantes :

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{F} + \Phi,\\ \mathfrak{Y} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{G} + \Psi,\\ \mathfrak{Z} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{H} + X.\end{aligned}\right.$$

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,P + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,p,\\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,Q + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,q,\\ \mathfrak{N} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,R + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,r.\end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (10), (12) et (54), on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z},\\ \mathfrak{M} &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x},\\ \mathfrak{N} &= \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}.\end{aligned}$$

D'autre part, en comparant les égalités (6) et (9), on trouve sans peine

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \Delta \int \frac{\alpha}{r}\,d\varpi + \frac{\partial 8}{\partial x},\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial x} &= \Delta \int \frac{\beta}{r}\,d\varpi + \frac{\partial 8}{\partial y},\\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \Delta \int \frac{\gamma}{r}\,d\varpi + \frac{\partial 8}{\partial z}.\end{aligned}$$

Si l'on observe que l'on a

$$\Delta \int \frac{\alpha}{r} d\varpi + 4\pi\alpha = 0,$$

$$\Delta \int \frac{\beta}{r} d\varpi + 4\pi\beta = 0,$$

$$\Delta \int \frac{\gamma}{r} d\varpi + 4\pi\gamma = 0,$$

on obtient les égalités

$$(56) \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + 4\pi\alpha, \\ \mathfrak{M} = \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} + 4\pi\beta, \\ \mathfrak{N} = \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} + 4\pi\gamma, \end{cases}$$

qui sont d'un fréquent usage.

VII. — *Des systèmes dont les propriétés ne dépendent pas de la valeur attribuée à la constante* λ.

La constante λ figure dans les six fonctions

$$\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W}, \quad \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{H}.$$

Mais ces fonctions ne s'introduisent, dans les équations de l'Électrodynamique, que par les combinaisons :

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathfrak{F},$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{V} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathfrak{G},$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathfrak{H}.$$

Dès lors, pour que les propriétés du système soient indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ, il faut et il suffit que ces trois combinaisons soient indépendantes de λ. Pour cela, *il est nécessaire et suffisant*

que l'on ait, en tout point du système,

(58) $$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = 0.$$

Cette condition équivaut aux suivantes :

On a, en tout point autour duquel la constitution du système est continue,

(59) $$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0,$$

et, en tout point appartenant à une surface de discontinuité,

(60) $$\begin{aligned} &\mathfrak{u}_1 \cos(n_1, x) + \mathfrak{v}_1 \cos(n_1, y) + \mathfrak{w}_1 \cos(n_1, z) \\ &+ \mathfrak{u}_2 \cos(n_2, x) + \mathfrak{v}_2 \cos(n_2, y) + \mathfrak{w}_2 \cos(n_2, z) = 0, \end{aligned}$$

Nous donnerons à des courants qui vérifient ces conditions (59) et (60), le nom de *courants de Maxwell;* c'est, en effet, à ces courants que l'on doit restreindre la plupart des propositions énoncées par Maxwell et ses disciples.

VIII. — *Potentiels.*

Le *potentiel électrostatique* de l'électrisation et de la polarisation répandues sur le système a pour valeur

(61) $$\begin{aligned} W = {} & \frac{\varepsilon}{2}\int V e \, d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int V E \, dS \\ & + \varepsilon \int \mathfrak{V} e \, d\varpi + \varepsilon \int \mathfrak{V} E \, dS \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right) d\varpi. \end{aligned}$$

Certaines intégrales s'étendent à tous les éléments de volume $d\varpi$ du système, certaines autres à tous les éléments dS des surfaces de discontinuité.

L'expression de ce potentiel peut encore s'écrire

(62) $$\begin{aligned} W = {} & \frac{\varepsilon}{2}\int V e \, d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int V E \, dS \\ & + \varepsilon \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\varpi, \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right) d\varpi. \end{aligned}$$

C'est un théorème bien connu que *cette quantité* $\mathfrak{W}$ *est essentiellement positive*, sauf dans le cas où le système n'est ni électrisé, ni polarisé : elle est alors égale à o.

On sait également que l'on a, pour un système immobile quelconque,

$$(63) \qquad \frac{d\mathfrak{W}}{dt} = \varepsilon \int \left[\frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial x}(u + \varphi) + \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial y}(v + \psi) + \frac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial z}(w + \chi) \right] d\varpi.$$

Le *potentiel magnétique du système* a pour expression

$$(64) \qquad \mathfrak{F} = \frac{1}{2} \int \left(\alpha \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} \right) d\varpi.$$

On sait que *cette quantité est essentiellement positive*, à moins que le système ne porte aucune aimantation, cas auquel elle est égale à o. On sait aussi que l'on a, pour un système immobile :

$$(65) \qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\varpi.$$

Le *potentiel électrodynamique*, tant des flux de conduction que des flux de déplacement répartis sur le système, a pour valeur

$$(66) \qquad \begin{aligned} H = &- \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w) \, d\varpi, \\ &- \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2} \int (\mathfrak{U} \varphi + \mathfrak{V} \psi + \mathfrak{W} \chi) \, d\varpi, \\ &- \frac{\mathfrak{C}^2}{4} \int (\mathfrak{F} \varphi + \mathfrak{G} \psi + \mathfrak{H} \chi) \, d\varpi. \end{aligned}$$

Ce potentiel peut encore s'écrire

$$(67) \qquad \begin{aligned} H = &- \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w) \, d\varpi, \\ &- \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2} \int (\mathfrak{F} u + \mathfrak{G} v + \mathfrak{H} w) \, d\varpi, \\ &- \frac{\mathfrak{C}^2}{4} \int (\mathfrak{F} \varphi + \mathfrak{G} \psi + \mathfrak{H} \chi) \, d\varpi. \end{aligned}$$

Helmholtz a montré que l'on pouvait écrire

$$
\begin{aligned}
(68)\quad 4\pi\Pi = & -\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{H}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{G}\right)\right]^2 d\varpi \\
& -\int\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{F}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{H}\right)\right]^2 d\varpi \\
& -\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{G}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{F}\right)\right]^2 d\varpi \\
& -\frac{1}{\lambda}\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{F}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{G}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\mathfrak{H}\right)\right]^2 d\varpi.
\end{aligned}
$$

Cette égalité montre que *si la constante* λ *est positive ou nulle, la quantité* Π *est essentiellement négative, à moins que le système ne soit le siège d'aucun courant, ni de conduction, ni de déplacement.*

On démontre sans peine que l'on a, pour un système immobile :

$$
\begin{aligned}
(69)\quad \frac{\partial\Pi}{\partial t} = & -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}u+\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}v+\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}w\right)d\varpi \\
& -\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t}u+\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t}v+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}w\right)\right. \\
& \qquad\left.+\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}\varphi+\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}\psi+\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}\chi\right)d\varpi\right] \\
& -\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t}\varphi+\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t}\psi+\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\chi\right)d\varpi.
\end{aligned}
$$

Le *potentiel électromagnétique* du système a pour expression

$$
\begin{aligned}
(70)\quad \mathfrak{p} = -\int\Bigg[& \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}u+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi\right)\Phi \\
& +\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}v+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi\right)\Psi \\
& +\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}w+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi\right)\mathrm{X}\Bigg]d\varpi.
\end{aligned}
$$

On peut encore le mettre sous la forme

$$
(71)\quad \mathfrak{p} = \int(\mathfrak{L}\alpha+\mathfrak{M}\beta+\mathfrak{N}\gamma)\,d\varpi.
$$

IX. — *Lois des courants de conduction.*

Soit ρ la résistance spécifique d'un conducteur en un point (x, y, z). Soient θ, η, ζ les composantes, au même point, de la force électromotrice indépendante de la distribution électrique sur le système, des courants qui le traversent, de l'aimantation qu'il porte. Si le système est immobile, nous aurons

$$(72)\quad \begin{cases} \rho u = -\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x} - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \theta, \\ \rho v = -\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y} - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \eta, \\ \rho w = -\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z} - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \zeta, \end{cases}$$

X. — *Lois de la polarisation diélectrique.*

Nous supposerons que la *fonction de polarisation* $F(\mathfrak{M})$ soit indépendante de l'intensité de polarisation $\mathfrak{M}$ et se réduise à une simple constante F. Nous aurons, en un système immobile,

$$(73)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -F\left[\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x} + \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right], \\ \mathcal{B} = -F\left[\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y} + \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right], \\ \mathcal{C} = -F\left[\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z} + \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right]. \end{cases}$$

On en déduit les valeurs suivantes pour les composantes du flux de déplacement, en vertu des égalités (3),

$$(74)\quad \begin{cases} \varphi = -F \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x} + \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right], \\ \psi = -F \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y} + \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right], \\ \chi = -F \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon \dfrac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z} + \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right]. \end{cases}$$

XI. — *Lois de l'aimantation.*

Nous supposerons que la *fonction magnétisante* $f(\mu)$ soit indépendante de l'intensité d'aimantation μ et se réduise à une simple constante f. Nous aurons alors, en tout point d'un système immobile,

$$(75)\qquad \begin{cases} \alpha = -f\left(\dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + \mathfrak{L}\right), \\ \beta = -f\left(\dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} + \mathfrak{M}\right), \\ \gamma = -f\left(\dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} + \mathfrak{N}\right). \end{cases}$$

En vertu des égalités (56), ces équations (55) peuvent encore s'écrire

$$(76)\qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{f}{1+4\pi f}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}\right), \\ \beta = -\dfrac{f}{1+4\pi f}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}\right), \\ \gamma = -\dfrac{f}{1+4\pi f}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{dy}\right). \end{cases}$$

XII. — *Sur la valeur de λ dans les recherches de Maxwell.*

Maxwell, dans ses divers Mémoires, ne donne jamais l'expression analytique explicite des composantes de la force électromotrice d'induction, qu'il représente, en général, par $-\dfrac{dF}{dt}$, $-\dfrac{dG}{dt}$, $-\dfrac{dH}{dt}$. Il assujettit seulement ces composantes à redonner le résultat connu des physiciens lorsqu'on en fait usage pour calculer la force électromotrice totale le long d'un circuit fermé. Il est bien évident que cette condition ne suffit pas à déterminer la forme des composantes de la force électromotrice; que si P, Q, R est une détermination acceptable de ces composantes, on aura une nouvelle détermination également acceptable en prenant le groupe de valeurs

$$P - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad Q - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad R - \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

Ψ étant une fonction finie, uniforme et continue, *mais d'ailleurs quelconque,* des coordonnées x, y, z.

Comment Maxwell a-t-il cru que l'indétermination de la fonction Ψ n'était qu'apparente et que cette fonction n'était autre chose que la fonction potentielle électrostatique? Il est difficile de l'expliquer, car il s'est toujours borné à affirmer cette identité sans essayer de l'établir [1]. Il a, du reste, reproduit à plusieurs reprises cette affirmation, comme en témoignent les passages suivants :

« Ψ, dit-il dans son Mémoire : *On physical lines of forces* [2], est une fonction de x, y, z et t qui est indéterminée en ce qui concerne la solution de la question originelle, mais qui, d'ailleurs, serait déterminée, dans un cas donné, par les circonstances du problème. L'interprétation de Ψ est que c'est la *tension électrique* en chaque point de l'espace. »

Dans son Mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field*, il écrit ces lignes :

« Ψ étant une fonction de x, y, z, t, qui est indéterminée en ce qui regarde la solution des équations précédentes, car les termes qui en dépendent disparaissent dans l'intégration le long d'un circuit. Néanmoins, la quantité Ψ peut être déterminée dans tous les cas particuliers où nous connaissons les conditions spéciales de la question. L'interprétation physique de Ψ est qu'il représente le *potentiel électrique* en chaque point de l'espace. »

Puis, deux pages plus loin, il ajoute :

« Le dernier terme représente l'effet du potentiel électrique Ψ. Celui-ci n'a pas d'effet lorsqu'il s'agit de produire un courant circulant dans un circuit fermé. Il indique l'existence de forces qui sollicitent l'électricité de ou vers certains points du champ. »

Enfin, dans son *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, Maxwell écrit [3] :

« Les termes qui comprennent la nouvelle quantité Ψ ont été introduits pour donner de la généralité aux expressions P, Q, R. Ils disparaissent quand l'intégrale est prise tout le long d'un circuit fermé. La quantité Ψ est donc indéterminée, du moins en ce qui concerne le problème actuel, où nous nous proposons d'obtenir la force électromotrice totale qui agit le long

---

[1] MAXWELL, *Scientifics papers*, t. I, p. 482.
[2] *Ibid.*, t. I, p. 558.
[3] Traduction française, t. II, p. 271.

CHAPITRE II.

LES DEUX TRIPLETS DE MAXWELL.

I. — *Le premier triplet.*

Les équations (76) peuvent se mettre sous plusieurs autres formes. Posons

$$
(77)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial x},\\
Y &= -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial y},\\
Z &= -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial z},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(78)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{X} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial x},\\
\mathcal{Y} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial y},\\
\mathcal{Z} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(79)\quad \left\{
\begin{aligned}
L &= -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} - \mathfrak{L},\\
M &= -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} - \mathfrak{M},\\
N &= -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} - \mathfrak{N}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (76) peuvent s'écrire, en vertu des équations (75) et (79),

$$
(80)\quad \left\{
\begin{aligned}
(1+4\pi f)\,L &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}\right),\\
(1+4\pi f)\,M &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right),\\
(1+4\pi f)\,N &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Cette forme a été donnée par Maxwell (¹).

(¹) MAXWELL, *On physical lines of forces*. Part. I. Éq. (55) (*Maxwell's Papers*, t. I,

Maxwell donne à $-\mathfrak{X}$, $-\mathfrak{Y}$, $-\mathfrak{Z}$, qu'il désigne par F, G, H, le nom de *composantes de l'état électrotonique;* les quantités L, M, N, qu'il désigne par α, β, γ, sont pour lui les *composantes de la force magnétique;* $(1 + 4\pi f)$, qu'il désigne par μ, est la *capacité inductive magnétique,* ou, selon le mot de W. Thomson, la *perméabilité magnétique.* Maxwell pose, en outre,

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= (1 + 4\pi f)\mathrm{L},\\ b &= (1 + 4\pi f)\mathrm{M},\\ c &= (1 + 4\pi f)\mathrm{N}, \end{aligned}\right.$$

et il donne à a, b, c le nom de *composantes de l'induction magnétique.*

Si l'on différentie les équations (76) par rapport à t et que l'on compare les résultats obtenus aux équations (73), on obtient le groupe d'équations que voici :

$$(82)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{1+4\pi f}{f}\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathrm{F}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{F}}\right),\\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{1+4\pi f}{f}\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{F}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathrm{F}}\right),\\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{1+4\pi f}{f}\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{F}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{F}}\right), \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme, ces équations ont été données par Helmholtz [1].

Les équations (80), différentiées par rapport à t, et comparées, soit aux équations (77), soit aux équations (78), donnent les deux groupes d'équations

$$(83)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial y} - \frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z},\\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathrm{X}}{\partial z} - \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial x},\\ \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial t} &= \frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x} - \frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

---

p. 475); *A dynamical theory of the electromagnetic field.* Équations B (*Maxwell's Papers,* t. I, p. 556); *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* t. II, p. 268 et 290 de la Traduction française.

[1] HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper.* Équations (21). (*Helmholtz Abhandlungen,* t. I, p. 624.)

$$(84)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathcal{Y}}{\partial z}, \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x}, \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial y}. \end{cases}$$

Lorsqu'on fait l'hypothèse

$$(51)\qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{C}$$

que nous savons être inadmissible, mais qui a été acceptée jusqu'ici, ces deux groupes deviennent identiques. Ils constituent alors un des deux triplets sur lesquels Heaviside ([1]), Hertz ([2]) et Cohn ([3]) font reposer l'Électrodynamique.

II. — *Le deuxième triplet.*

Des deux dernières équations (56), jointes aux deux dernières équations (79), on déduit sans peine la relation

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial x\,\partial z} - 4\pi\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right),$$

relation que l'on peut écrire sous la forme de la première des égalités

$$(85)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} = -4\pi\left(\dfrac{\partial \gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial \beta}{\partial z}\right) + \Delta\mathfrak{X} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = -4\pi\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + \Delta\mathfrak{Y} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4\pi\left(\dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y}\right) + \Delta\mathfrak{Z} - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Or, les égalités (54), (17), (19) et (21) donnent, en vertu des égalités

---

([1]) HEAVISIDE, *On electromagnetic waves, especially in relation to the vorticity of the impressed forces; and the forced vibrations of electromagnetic systems.* Éq. (3). (*Philosophical Magazine*, 5e série, t. XXV, p. 130; 1888.)

([2]) H. HERTZ, *Ueber die Grundgleichungen der Electrodynamik für ruhende leitende Körper.* Équations (6 *a*). (*Wiedemann's Annalen*, t. XL, p. 577; 1890.)

([3]) COHN, *Zur Systematik der Electricitätslehre.* Équations (2). (*Wiedemann's Annalen*, t. XL, p. 625; 1890.)

(52) et (53),

$$
(86)\quad \begin{cases}
\Delta\mathfrak{X} = (1-\lambda)\dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t} - 4\pi\mathfrak{u} + 4\pi\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial z}\right),\\[2ex]
\Delta\mathfrak{Y} = (1-\lambda)\dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t} - 4\pi\mathfrak{v} + 4\pi\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right),\\[2ex]
\Delta\mathfrak{Z} = (1-\lambda)\dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t} - 4\pi\mathfrak{w} + 4\pi\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial x} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right),
\end{cases}
$$

tandis que les égalités (54), (18), (20) et (22) donnent, en vertu de l'égalité (53),

$$
(87)\quad \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z} = \lambda\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}.
$$

Les égalités (85), (86), (87) donnent le groupe de relations

$$
(88)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} = -4\pi\mathfrak{u} + \dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t},\\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = -4\pi\mathfrak{v} + \dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t},\\[2ex]
\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4\pi\mathfrak{w} + \dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t}.
\end{cases}
$$

Ces équations (88) peuvent encore se mettre sous une autre forme.

En vertu des équations (52), (72), (74), (77) et (78), elles peuvent s'écrire

$$
(89)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} = \dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t} - \dfrac{4\pi\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial X}{\partial t} - \dfrac{4\pi\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathfrak{X}+\xi),\\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t} - \dfrac{4\pi\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial Y}{\partial t} - \dfrac{4\pi\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathfrak{Y}+\eta),\\[2ex]
\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t} - \dfrac{4\pi\mathfrak{C}F}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial Z}{\partial t} - \dfrac{4\pi\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathfrak{Z}+\zeta).
\end{cases}
$$

Si, dans ces équations, on fait l'hypothèse, d'ailleurs inacceptable, $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, et si l'on suppose le milieu dénué de conductibilité, ce qui revient à faire $\rho = \infty$, on retrouve un groupe d'équations données par Helmholtz (1).

---

(1) HELMHOLTZ, *loc. cit.* Équations (21_b) (*Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 625).

III. — *Forme de ce triplet adoptée par Maxwell.*

Considérons des *courants de Maxwell* caractérisés par les égalités (59) et (60). Pour de tels courants, on a identiquement

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = 0, \tag{58}$$

en sorte que les équations (89) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) &= -\left[\frac{\mathfrak{C} F}{\sqrt{2}}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathcal{X} + \theta)\right], \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) &= -\left[\frac{\mathfrak{C} F}{\sqrt{2}}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathcal{Y} + \eta)\right], \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) &= -\left[\frac{\mathfrak{C} F}{\sqrt{2}}\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}}(\mathcal{Z} + \zeta)\right]. \end{aligned}\right. \tag{90}$$

Ces équations peuvent encore s'écrire, en vertu des égalités (52), (72), (74), (77) et (78),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= -4\pi \mathfrak{u}, \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= -4\pi \mathfrak{v}, \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= -4\pi \mathfrak{w}. \end{aligned}\right. \tag{91}$$

Les équations (90) et (91) sont donc exactes toutes les fois que les courants considérés sont des courants de Maxwell.

Inversement, si ces équations sont exactes, les courants sont des courants de Maxwell.

En effet, considérons, en premier lieu, un point autour duquel la constitution du système varie d'une manière continue. Différentions la première des égalités (91) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0. \tag{59}$$

Considérons, en second lieu, une surface de discontinuité séparant deux

régions, 1 et 2, du système. Si les équations (91) sont vérifiées en chacune des régions 1 et 2, on aura

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial(\mathrm{N}_1-\mathrm{N}_2)}{\partial y}-\frac{\partial(\mathrm{M}_1-\mathrm{M}_2)}{\partial z}\right]\cos(n_1, x)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\mathrm{N}_1-\mathrm{N}_2)}{\partial x}\right]\cos(n_1, y)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathrm{M}_1-\mathrm{M}_2)}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2)}{\partial y}\right]\cos(n_1, z)\\
&=-4\pi[\mathfrak{u}_1\cos(n_1, x)+\mathfrak{v}_1\cos(n_1, y)+\mathfrak{w}_1\cos(n_1, z)\\
&\qquad+\mathfrak{u}_2\cos(n_2, x)+\mathfrak{v}_2\cos(n_2, y)+\mathfrak{w}_2\cos(n_2, z)].
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (79), cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned}
(92)\qquad &\left[\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial y}-\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial z}\right]\cos(n_1, x)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial x}\right]\cos(n_1, y)\\
&+\left[\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial z}-\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}\right]\cos(n_1, z)\\
&=4\pi[\mathfrak{u}_1\cos(n_1, x)+\mathfrak{v}_1\cos(n_1, y)+\mathfrak{w}_1\cos(n_1, z)\\
&\qquad+\mathfrak{u}_2\cos(n_2, x)+\mathfrak{v}_2\cos(n_2, y)+\mathfrak{w}_2\cos(n_2, z)].
\end{aligned}$$

Les égalités (55) donnent

$$\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)}{\partial y}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(p_1-p_2)}{\partial y}.$$

En vertu des égalités (47) cette égalité devient la première des deux égalités

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}&=\left[\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathrm{P}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\mathrm{P}_2}{\partial n_2}\right)+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial p_1}{\partial n_1}+\frac{\partial p_2}{\partial n_2}\right)\right]\cos(n_1 y),\\
\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial z}&=\left[\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathrm{P}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\mathrm{P}_2}{\partial n_2}\right)+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial p_1}{\partial n_1}+\frac{\partial p_2}{\partial n_2}\right)\right]\cos(n_1, z).
\end{aligned}$$

La seconde s'établit d'une manière analogue.

Ces deux égalités fournissent la première des égalités

$$(93)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial y}\cos(n_1, z)-\frac{\partial(\mathfrak{L}_1-\mathfrak{L}_2)}{\partial z}\cos(n_1, y)=0,\\
&\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial z}\cos(n_1, x)-\frac{\partial(\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2)}{\partial x}\cos(n_1, z)=0,\\
&\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial x}\cos(n_1, y)-\frac{\partial(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)}{\partial y}\cos(n_1, x)=0.
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

Les égalités (92) et (93) entraînent l'égalité

$$(60)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{u}_1\cos(n_1, x) + \mathfrak{v}_1\cos(n_1, y) + \mathfrak{w}_1\cos(n_1, z) \\ &+ \mathfrak{u}_2\cos(n_2, x) + \mathfrak{v}_2\cos(n_2, y) + \mathfrak{w}_2\cos(n_2, z) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que les équations (90) ou (91) soient applicables à un système de courants, il faut et il suffit que ce soient des *courants de Maxwell.*

Maxwell [1] a obtenu les équations (91), ou plutôt celles que l'on en déduirait en faisant l'hypothèse inadmissible $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, par un raisonnement qui suppose évidemment que l'on a affaire à des courants uniformes; il a fait remarquer, d'ailleurs, que ces équations (91) entraînaient l'uniformité des flux électriques. Heaviside [2], H. Hertz [3] et Cohn [4] ont adopté sans démonstration, le premier les équations (91), les deux derniers les équations (90). Helmholtz [5], qui avait donné la forme générale du triplet que nous avons indiquée au paragraphe précédent, a adopté, dans un de ses derniers Mémoires, la forme (91).

Heaviside, Hertz et Cohn ont proposé d'accepter sans démonstration les deux triplets (83) [ou (84)] et (90) [ou (91)] et de les considérer comme les hypothèses fondamentales sur lesquelles repose toute l'Électrodynamique. On reconnaîtra, sans peine, à quel point cette idée est dangereuse si l'on observe que le triplet (90) [ou (91)] n'est vrai que moyennant la restriction suivante : *tous les courants sont des courants de Maxwell*, tandis que l'on ne peut rendre compte de certains phénomènes, sans rejeter cette restriction, comme nous le verrons plus loin.

---

(1) MAXWELL, *On Faraday's lines of force* (Maxwell's Papers, t. I, p. 194). — *On physical lines of forces* (Maxwell's Papers, t. I, p. 462). — *A dynamical theory of the electromagnetic field* (Maxwell's Papers, t. I, p. 557). — *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 285 de la traduction française.

(2) HEAVISIDE, *loc. cit.* Équation (2), p. 130.

(3) H. HERTZ, *loc. cit.* Équations (6d), p. 588.

(4) COHN, *loc. cit.* Équations (3), p. 626.

(5) HELMHOLTZ, *Das Princip der kleinsten Wirkung in der Electrodynamik.*

CHAPITRE III.

L'ÉNERGIE INTERNE.

I. — *L'énergie interne du système électromagnétique le plus général.*

Lorsqu'il n'y a, dans un système, ni flux de conduction, ni flux de déplacement, l'énergie interne U est donnée par l'égalité

$$(94)\quad \begin{aligned} \mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon &+ \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q + \frac{\varepsilon}{2}\sum q(\mathrm{V}+\mathfrak{v}) \\ &+ \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})\right]d\varpi \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\int\left[\mathcal{A}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{v})}{\partial z}\right]d\varpi \\ &+ \int\left[\mathfrak{f}(\mu,\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\mathfrak{f}(\mu,\mathrm{T})\right]d\varpi \\ &+ \frac{1}{2}\int\left[\alpha\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial z}\right]d\varpi. \end{aligned}$$

Dans cette formule, Υ présente l'énergie interne qu'aurait le système, si l'on supposait qu'il fût dépourvu d'électrisation, d'aimantation et de polarisation;

Θ est une quantité qui dépend de la nature du système au voisinage du point où se trouve la charge q;

$\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})$ est une fonction liée à $\mathrm{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})$ par l'égalité

$$(95)\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})} = \frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}};$$

$\mathfrak{f}(\mu,\mathrm{T})$ est une fonction liée à $f(\mu,\mathrm{T})$ par l'égalité

$$(96)\quad \frac{\mu}{f(\mu,\mathrm{T})} = \frac{\partial\mathfrak{f}(\mu,\mathrm{T})}{\partial\mu}.$$

Enfin, le signe $\sum$ indique une sommation qui s'étend à toutes les charges électriques répandues sur le système.

Dans le cas où le système renferme des flux de conduction ou de déplacement, nous ajouterons, au second membre de l'égalité (94), un terme EU′, dont nous allons déterminer la valeur.

Nous nous appuierons, pour cela, sur l'hypothèse qui nous a toujours servi dans des cas analogues.

Soient

$$(97)\qquad \begin{cases} E_x = \mathcal{X} + \theta, \\ E_y = \mathcal{Y} + \eta, \\ E_z = \mathcal{Z} + \zeta \end{cases}$$

les composantes de la force électromotrice totale en un point (x, y, z). Soit dQ la quantité de chaleur dégagée par le système pendant le temps dt. On a

$$(98)\qquad \mathrm{E}\,dQ = \int \left[\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T}\right)u + \left(E_y - T\frac{\partial E_y}{\partial T}\right)v + \left(E_z - T\frac{\partial E_z}{\partial T}\right)w\right]d\varpi + \mathrm{E}\,dQ',$$

dQ' étant donné, *dans le cas où les corps magnétiques et diélectriques sont parfaitement doux et où la température* T *est invariable en chaque point*, par l'égalité

$$(99)\qquad \mathrm{E}\,dQ' = \frac{\partial}{\partial t}\int T\frac{\partial}{\partial T}[\mathcal{F}(\mathfrak{M}, T) + \mathfrak{f}(\mu, T)]\,d\varpi.$$

Supposons *le système immobile*. Les égalités (94), (97), (98), (99), jointes aux renseignements que l'étude du galvanisme fournit au sujet des forces électromotrices θ, η, ζ, nous donnent l'égalité suivante :

$$(100)\qquad \int\left\{\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + \frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\right]\right\}d\varpi$$
$$+\int\left[\frac{\partial\mathfrak{f}(\mu)}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]d\varpi$$
$$+\mathrm{E}\frac{\partial U'}{\partial t}$$
$$= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}u + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}v + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}w\right)d\varpi.$$

Mais l'égalité (95) permet d'écrire

$$\int\left\{\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + \frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\right]\right\}d\varpi$$
$$= \int\left\{\left[\frac{\mathcal{A}}{F(\mathfrak{M})} + \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial x}\right]\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + \left[\frac{\mathcal{B}}{F(\mathfrak{M})} + \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial y}\right]\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + \left[\frac{\mathcal{C}}{F(\mathfrak{M})} + \varepsilon\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial z}\right]\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\right\}d\varpi.$$

Les égalités (73), où l'on remplace F par $F(\mathcal{M})$, transforment cette égalité en la suivante :

$$(101)\qquad \int\left\{\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathcal{M})}{\partial t}+\varepsilon\left[\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}+\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t}+\frac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\right]\right\}d\varpi$$
$$=-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\right)d\varpi.$$

De même, l'égalité (96) permet d'écrire

$$\int\left[\frac{\partial\mathfrak{f}(\mu)}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]d\varpi$$
$$=\int\left\{\left[\frac{\alpha}{f(\mu)}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\left[\frac{\beta}{f(\mu)}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}\right]\frac{\partial\beta}{\partial t}+\left[\frac{\gamma}{f(\mu)}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z}\right]\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\}d\varpi.$$

Les égalités (75), où l'on remplace f par $f(\mu)$, transforment cette égalité en la suivante :

$$(102)\qquad \int\left[\frac{\partial\mathfrak{f}(\mu)}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]d\varpi$$
$$=-\int\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\mathfrak{M}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\mathfrak{N}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)d\varpi.$$

Les égalités (100), (101), (102) donnent l'égalité

$$(103)\qquad E\frac{\partial U'}{\partial t}=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}u+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}v+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}w\right)d\varpi$$
$$+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\varphi+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\psi+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\chi\right)d\varpi$$
$$+\int\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\mathfrak{M}\frac{\partial\beta}{\partial t}+\mathfrak{N}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)d\varpi.$$

Les égalités (54), (67) et (69) donnent sans peine l'égalité

$$
\begin{aligned}
(104) \qquad & \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} u - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} v - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} w \right) d\varpi \\
& - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \varphi - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \psi - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \chi \right) d\varpi \\
& = \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi \\
& - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathfrak{F} u + \mathfrak{G} v - \mathfrak{H} w)\, d\varpi \\
& + \frac{\mathfrak{C}^2}{4} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathfrak{F} \varphi + \mathfrak{G} \psi + \mathfrak{H} \chi)\, d\varpi \\
& - \int \left[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \varphi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right. \\
& \qquad + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\
& \qquad \left. + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{\partial X}{\partial t} \right] d\varpi.
\end{aligned}
$$

Les égalités (103) et (104), jointes à l'identité

$$
\begin{aligned}
(105) \qquad & \int \left[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \varphi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right. \\
& \qquad + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\
& \qquad \left. + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{\partial X}{\partial t} \right] d\varpi \\
& = - \int \left(\mathfrak{L} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathfrak{M} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathfrak{N} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\varpi,
\end{aligned}
$$

que l'on obtient en remplaçant α, β, γ par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \beta}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}$, dans les égalités (70) et (71), donnent

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E} \frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \Bigg[& \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi \\
& + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2} \int (\mathfrak{F} u + \mathfrak{G} v + \mathfrak{H} w)\, d\varpi \\
& + \frac{\mathfrak{C}^2}{4} \int (\mathfrak{F} \varphi + \mathfrak{G} \psi + \mathfrak{H} \chi)\, d\varpi \Bigg].
\end{aligned}
$$

De cette égalité, on déduit sans peine

(106)
$$\begin{aligned} \mathrm{E}\mathrm{U}' = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int(\mathfrak{U}u - \mathfrak{V}v - \mathfrak{W}w)\,d\varpi \\ & - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2}\int(\mathfrak{F}u - \mathfrak{G}v - \mathfrak{H}w)\,d\varpi \\ & + \frac{\mathfrak{C}^2}{4}\int(\mathfrak{F}\varphi + \mathfrak{G}\psi - \mathfrak{H}\chi)\,d\varpi. \end{aligned}$$

Les égalités (94) et (106) déterminent la forme de l'énergie interne du système électrodynamique le plus général. Le terme EU′ est égal, au signe près, au potentiel électrodynamique Π défini par l'égalité (67). Le potentiel électromagnétique n'y figure pas.

II. — *Comment Maxwell détermine l'énergie interne d'un système électromagnétique.*

L'interprétation mécanique que Maxwell a tenté de donner des phénomènes électriques le conduisait à adopter une forme spéciale pour l'énergie interne d'un système électromagnétique (¹).

Cette énergie est la somme de deux termes : *l'énergie potentielle* et *l'énergie cinétique*.

Le premier terme est représenté par une intégrale triple étendue au volume entier du système. Le terme sous le signe $\int$ est proportionnel à $(X^2 + Y^2 + Z^2)$, ou, si l'on préfère, à $\mathfrak{M}^2$.

Le second terme est représenté, lui aussi, par une intégrale triple étendue au volume entier du système. La quantité sous le signe $\int$ est proportionnelle à $(L^2 + M^2 + N^2)$, ou, si l'on préfère, à μ^2.

Dans le Mémoire qu'il a publié ultérieurement, et dans son *Traité*, Maxwell cherche à retrouver, en s'appuyant sur les lois fondamentales de l'Électrostatique et de l'Électromagnétisme, une forme analogue pour l'énergie interne. Il parvient, en effet, à la forme suivante :

(107)
$$\begin{aligned} \mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon & + \frac{1}{2}\int(\mathcal{A}X + \mathcal{B}Y + \mathcal{C}Z)\,d\varpi \\ & + \frac{1}{8\pi}\int(1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\,d\varpi. \end{aligned}$$

(¹) MAXWELL, *On physical lines of force* (*Maxwell's papers*, t. I, p. 460).

« La seconde intégrale, dit Maxwell (¹), dépend de l'aimantation du champ et s'explique, dans notre théorie, par les mouvements actuels de toute espèce dont le champ est le siège. La première intégrale dépend de la polarisation du champ et s'explique par les déformations de tout genre dont le champ est le siège. »

Pour parvenir à cette formule (107), si intimement liée à quelques-unes de ses idées les plus essentielles, Maxwell n'hésite pas à accumuler de graves paralogismes.

Maxwell considère d'abord un système dépourvu de tout flux de conduction ou de déplacement. Laissant de côté les termes

$$\sum \left(\Theta - T\,\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right) q,$$

$$\int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) - T\,\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right] d\varpi,$$

$$\int \left[\mathfrak{f}(\mu, T) - T\,\frac{\partial \mathfrak{f}(\mu, T)}{\partial T}\right] d\varpi,$$

qu'une foule de phénomènes nous obligent à introduire, mais qui ne sont jamais entrés en ligne de compte dans ses théories, il se borne à introduire le *potentiel électrostatique* et le *potentiel magnétique* dans l'expression de l'énergie interne.

Empruntons la détermination de la première partie soit au Mémoire : *On physical lines of force*, soit au Mémoire : *A dynamical theory of the electromagnetic field*. Le raisonnement suivi dans le *Traité*, bien que peu différent, se réfère à une théorie des corps diélectriques autre que la théorie de la polarisation. Quant à la seconde partie, nous suivrons le mode de détermination indiqué dans le *Traité*.

Conformément à une erreur de principe qui vicie toutes ses théories, ainsi que nous l'avons fait remarquer ailleurs (²), Maxwell commence par faire abstraction de toute électrisation réelle et par réduire le potentiel électrostatique au potentiel de la polarisation diélectrique sur elle-même, potentiel qu'il écrit, *avec une faute de signe* (³),

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int \left(\mathcal{A}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C}\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right) d\varpi.$$

(¹) MAXWELL, *Papers*, t. I, p. 562.

(²) *Quelques remarques au sujet de l'électrodynamique des corps diélectriques, proposée par J. Clerk Maxwell* (3ᵉ Congrès scientifique des catholiques. Bruxelles; 1894).

(³) MAXWELL, *Papers*, t. I, p. 495, égalité (104) et p. 563, nº 572.

Quant au potentiel magnétique, il lui conserve la forme

$$\frac{1}{2}\int\left(\alpha\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}+\beta\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y}+\gamma\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z}\right)d\varpi.$$

Maxwell passe ensuite au cas où le système renferme des flux de conduction et de déplacement; il commence par supprimer le potentiel magnétique; « cette partie de l'énergie, dit-il, sera comprise dans l'énergie cinétique sous la forme que nous allons lui donner »; en fait, le potentiel magnétique constitue l'une des pierres d'achoppement auquel vient se heurter la théorie qui regarde les aimants comme des systèmes de courants particulaires et l'énergie électrodynamique comme de l'énergie cinétique; de là l'omission, par Maxwell, de ce terme embarrassant, omission que ne justifient nullement les vagues digressions du n° 637 du *Traité*.

Sans prévenir de ce changement, Maxwell raisonne, à partir du n° 638, comme si le terme électrostatique de EU avait pour expression

$$(108)\qquad \begin{aligned} \mathrm{W} = -\int\Bigg[&\left(\varepsilon\,\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right)\mathcal{A} \\ &+\left(\varepsilon\,\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right)\mathcal{B} \\ &+\left(\varepsilon\,\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right)\mathcal{C}\Bigg]d\varpi \\ = \quad &\frac{1}{2}\int(\mathrm{X}\mathcal{A}+\mathrm{Y}\mathcal{B}+\mathrm{Z}\mathcal{C})\,d\varpi. \end{aligned}$$

Aucun raisonnement ne justifie l'introduction, sous le signe $\int$ des termes

$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{A}\,\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t},\qquad \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{B}\,\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t},\qquad \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{C}\,\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Quant à l'énergie électrocinétique, Maxwell raisonne, à partir du n° 634, comme si elle avait pour expression

$$(109)\qquad \mathrm{T}=\frac{1}{2}\int(\mathfrak{X}\mathfrak{u}+\mathfrak{Y}\mathfrak{v}+\mathfrak{Z}\mathfrak{w})\,d\varpi.$$

Les égalités (52), (54), (66) et (70) montrent que $(-\mathrm{T})$ est égal au *potentiel électrodynamique augmenté de la moitié du potentiel électromagnétique*. Pour justifier cette détermination de T, Maxwell renvoie au n° 578 de son *Traité;* dans ce dernier numéro, il a simplement prouvé que, dans un système dépourvu de magnétisme, T était égal au potentiel électrodynamique changé de signe.

Pour transformer l'égalité (109), Maxwell fait usage des égalités (91), lesquelles ne sont point exactes, nous le savons, à moins que l'on ait

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que les courants soient des *courants de Maxwell*.

Admettons cette restriction.

L'égalité (109) deviendra alors

$$(110)\qquad \mathrm{T} = -\frac{1}{8\pi}\int\Big[\Big(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\Big)\mathfrak{A} + \Big(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\Big)\mathfrak{B} + \Big(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}\Big)\mathfrak{C}\Big]\,d\varpi.$$

Transformons cette expression au moyen d'intégrations par parties. Nous aurons

$$(111)\qquad \begin{aligned} \mathrm{T} = &-\frac{1}{8\pi}\int\Big[\Big(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\Big)\mathrm{L} + \Big(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x}\Big)\mathrm{M} + \Big(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y}\Big)\mathrm{N}\Big]\,d\varpi \\ &-\frac{1}{8\pi}\int\Big\{\mathrm{L}_1[\mathfrak{C}\cos(n_1, y) - \mathfrak{B}\cos(n_1, z)] \\ &\qquad + \mathrm{L}_2[\mathfrak{C}\cos(n_2, y) - \mathfrak{B}\cos(n_2, z)] \\ &\qquad + \mathrm{M}_1[\mathfrak{A}\cos(n_1, z) - \mathfrak{C}\cos(n_1, x)] \\ &\qquad + \mathrm{M}_2[\mathfrak{A}\cos(n_2, z) - \mathfrak{C}\cos(n_2, x)] \\ &\qquad + \mathrm{N}_1[\mathfrak{B}\cos(n_1, x) - \mathfrak{A}\cos(n_1, y)] \\ &\qquad + \mathrm{N}_2[\mathfrak{B}\cos(n_2, x) - \mathfrak{A}\cos(n_2, y)]\Big\}\,d\mathrm{S}, \end{aligned}$$

la seconde intégrale s'étendant à toutes les surfaces de discontinuité du système.

Mais, en vertu des égalités (79), (55), (45) et (35), on a

$$\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 = -\Big(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_2}\Big)\cos(n_1, x),$$

$$\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2 = -\Big(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_2}\Big)\cos(n_1, y),$$

$$\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2 = -\Big(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_2}\Big)\cos(n_1, z).$$

en sorte que l'égalité (111) devient simplement

$$T = -\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial z}\right)L + \left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right)M + \left(\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y}\right)N\right]d\varpi$$

ou bien, en vertu des égalités (80),

$$T = \frac{1}{8\pi}\int(1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\,d\varpi. \tag{112}$$

Les égalités (108) et (112) donnent l'égalité (107) que Maxwell voulait obtenir.

III. — *Le théorème de Poynting.*

Considérons l'intégrale

$$J = \frac{1}{2}\int(X\mathcal{A} + Y\mathcal{B} + Z\mathcal{C})\,d\varpi + \frac{1}{8\pi}\int(1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\,d\varpi, \tag{113}$$

étendue à un espace limité quelconque, et convenons de la nommer l'*énergie électrique contenue dans cet espace;* ce mot ne sera, pour nous, qu'une simple notation, car ce que nous venons de dire nous a surabondamment prouvé que ce terme n'avait aucune analogie avec l'énergie interne, et que le raisonnement par lequel Maxwell a établi un lien entre ces deux quantités était fautif en plusieurs points.

Les égalités (73) et (77) permettent d'écrire l'égalité (113) sous la forme

$$J = \frac{1}{2}\int\frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}{F}\,d\varpi + \frac{1}{8\pi}\int(1 + 4\pi f)(L^2 + M^2 + N^2)\,d\varpi,$$

qui, différentiée par rapport à t, donne

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \int\left(\frac{\mathcal{A}}{F}\varphi + \frac{\mathcal{B}}{F}\psi + \frac{\mathcal{C}}{F}\chi\right)d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int(1 + 4\pi f)\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)d\varpi.$$

Moyennant les égalités (73), (77) et (83), cette égalité peut s'écrire

$$(114)\quad \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int(X\varphi + Y\psi + Z\chi)\,d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)L + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)M + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)N\right]d\varpi.$$

Imaginons maintenant que l'*espace considéré ne renferme pas de corps conducteur*. Nous aurons, en tout point de cet espace,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

de sorte que les égalités (88) deviendront

$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t},$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t},$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t}.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (114) devient

$$(115)\quad 4\pi\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial t} = \int\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t}X + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t}Y + \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t}Z\right)d\varpi - \int\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)X + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)Y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)Z\right]d\varpi + \int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)L + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)M + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)N\right]d\varpi.$$

Mais des intégrations par parties donnent

$$(116)\quad \int\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)X + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)Y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)Z\right]d\varpi$$
$$= \int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)L + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)M + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)N\right]d\varpi$$
$$+ \int\Big\{ L_1[Z_1\cos(n_1, y) - Y_1\cos(n_1, z)] + L_2[Z_2\cos(n_2, y) - Y_2\cos(n_2, z)] + \ldots\Big\}\,dS$$
$$+ \int\Big\{ L\,[Z\cos(n_i, y) - Y\cos(n_i, z)] + \ldots\Big\}\,d\Sigma.$$

Dans la deuxième intégrale du second membre, dS est l'aire d'un élément découpé sur l'une des surfaces de discontinuité contenues dans l'espace considéré; le signe $+\ldots$ remplace quatre termes qui se déduisent par permutation tournante des deux termes explicitement écrits. Dans la troisième intégrale du second membre, $d\Sigma$ est l'aire de l'un des éléments découpés sur la surface qui limite le système; n_i est la demi-normale dirigée vers l'intérieur du système; le signe $+\ldots$ remplace deux termes qui se déduisent par permutation tournante du terme explicitement écrit.

On aura donc

$$(117) \qquad 4\pi\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial t} = \int\left(\frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial x\,\partial t}X + \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial y\,\partial t}Y + \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial z\,\partial t}Z\right)d\varpi$$
$$+\int\Big\{ L_1[Z_1\cos(n_1, y) - Y_1\cos(n_1, z)]$$
$$+ L_2[Z_2\cos(n_2, y) - Y_2\cos(n_2, z)] + \ldots\Big\}dS$$
$$+\int\Big\{ L\,[Z\,\cos(n_i, y) - Y\,\cos(n_i, z)] + \ldots\Big\}d\Sigma.$$

M. Poynting [1] a donné une égalité qui se déduit de celle-là par suppression des deux premiers termes du second membre.

Le premier terme a disparu de l'égalité proposée par M. Poynting parce que ce physicien a fait usage, dans sa démonstration, du deuxième triplet de Maxwell, ce qui suppose implicitement que *tous les courants sont des courants de Maxwell,* c'est-à-dire que

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} = 0$$

dans tout l'espace. Quant au second terme, M. Poynting ne l'a pas écrit faute d'avoir remarqué que les quantités L, M, N, X, Y, Z peuvent être discontinues le long de certaines surfaces. Ce terme disparaîtrait si, pour les deux diélectriques limitrophes, on avait $f_1 = f_2$.

Dans ce cas, en effet, les égalités (200 *bis*) et (201 *bis*), que nous trouverons plus loin, donneraient

$$L_1 = L_2, \qquad M_1 = M_2, \qquad N_1 = N_2,$$

---

[1] Poynting, *On the transfer of energy in the electromagnetic field* (*Philosophical Transactions*, t. CLXXV, 2e partie, p. 343; 1884).

et l'on a, d'ailleurs, en toutes circonstances,

$$\frac{X_1 - X_2}{\cos(n_1, x)} = \frac{Y_1 - Y_2}{\cos(n_1, y)} = \frac{Z_1 - Z_2}{\cos(n_1, z)}.$$

M. Poynting écrit, sous la forme suivante, la formule qu'il a proposée :

$$(118) \qquad \frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}} \int \left[(MZ - NY)\cos(n_i, x) + (NX - LZ)\cos(n_i, y) + (LY - MX)\cos(n_i, z) \right] dS.$$

Il énonce cette égalité de la manière suivante :

La variation de la quantité d'énergie que renferme un volume donné rempli par des corps diélectriques s'exprime de la même manière que si l'énergie était un fluide dont le flux, en chaque point, aurait pour composantes

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}}(MZ - NY),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}}(NX - LZ),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi \mathfrak{C}}(LY - MX).$$

Ce théorème a suscité une doctrine philosophico-scientifique nouvelle, la doctrine du *transport de l'énergie*, qui prétend traiter la Physique en se passant de l'existence du corps. Nous ne voulons pas discuter ici cette doctrine; nous nous contenterons de souligner le caractère douteux de la proposition qui lui a donné naissance.

CHAPITRE IV.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE SUR UN SYSTÈME IMMOBILE.

Considérons des corps conducteurs, diélectriques ou magnétiques, qui ne sont animés d'aucun mouvement. Imaginons que, sur ces corps, les lois représentées par les égalités (73) et (75) soient applicables; ce qui revient à dire que ces corps sont parfaitement doux tant au point de vue diélectrique qu'au point de vue magnétique.

Supposons, en outre, que l'on ait, en tout point,

$$\theta = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

L'équilibre électrique et magnétique pourra alors s'établir sur ce système.

Pour traiter la question avec une entière généralité, nous supposerons le système formé de deux parties : l'une 1, dépourvue de conductibilité, tandis que l'autre 2 est conductrice. Ces deux parties sont d'ailleurs supposées diélectriques et magnétiques.

On a alors, en tout point de la partie 1,

$$(119) \qquad \rho_1 = \infty,$$

ce qui entraîne nécessairement, à tout instant,

$$(120) \qquad u_1 = v_1 = w_1 = 0,$$

$$(121) \qquad e = e_1 = \text{const.}$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ l'équilibre soit établi sur le système.

En chaque point du corps 1, la densité électrique a la valeur e_1; en chaque point du corps 2, la densité électrique a la valeur 0; en chaque point appartenant à une surface de discontinuité, la densité électrique superficielle a la valeur E_0; V_0 est la fonction potentielle de cette distribution.

En chaque point du corps 1, la polarisation a pour composantes

$$(\mathcal{A}_1)_0, \quad (\mathcal{B}_1)_0, \quad (\mathcal{C}_1)_0.$$

En chaque point du corps 2, la polarisation est nulle; $\mathfrak{V}_0$ est la fonction potentielle d'une telle distribution.

En chaque point du corps 1, on a

$$(122)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A}_1)_0 = -\varepsilon F_1 \dfrac{\partial(V_0 + \mathfrak{V}_0)}{\partial x}, \\ (\mathfrak{B}_1)_0 = -\varepsilon F_1 \dfrac{\partial(V_0 + \mathfrak{V}_0)}{\partial y}, \\ (\mathfrak{C}_1)_0 = -\varepsilon F_1 \dfrac{\partial(V_0 + \mathfrak{V}_0)}{\partial z}, \end{cases}$$

tandis qu'en chaque point du corps 2, on a

$$(123)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(V_0 + \mathfrak{V}_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial(V_0 + \mathfrak{V}_0)}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial(V_0 + \mathfrak{V}_0)}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Enfin, à l'instant $t = 0$, on a, en tout point du système,

$$\begin{array}{lll} u = 0, & v = 0, & w = 0, \\ \varphi = 0, & \psi = 0, & \chi = 0, \\ \alpha = 0, & \beta = 0, & \gamma = 0. \end{array}$$

Nous allons démontrer que *cet équilibre est stable sous les conditions suivantes :*

1° *La constante* λ *n'est pas négative*

$$(124)\quad \lambda \geqq 0;$$

2° *Le coefficient de polarisation* F *n'est négatif pour aucun corps*

$$(125)\quad F \geqq 0;$$

3° *Le coefficient d'aimantation* f *n'est négatif pour aucun corps*

$$(126)\quad f \geqq 0.$$

Nous obtiendrons ainsi l'entière généralisation d'un beau théorème de Helmholtz [1].

---

[1] H. Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen des Elektricität für ruhende leitende Körper* (Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I).

Soit V′ la fonction potentielle électrostatique de la distribution

$$\begin{array}{ll} e_1 = 0, & \text{sur le corps 1,} \\ e = e_2, & \text{sur le corps 2,} \\ E = E', & \text{sur les surfaces de discontinuité.} \end{array}$$

Soit, de même, $\mathfrak{V}'$ la fonction potentielle diélectrique de la polarisation

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A} = \mathcal{A}'_1, & \mathcal{B} = \mathcal{B}'_1, & \mathcal{C} = \mathcal{C}'_1, & \text{sur le corps 1,} \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}_2, & \mathcal{B} = \mathcal{B}_2, & \mathcal{C} = \mathcal{C}_2, & \text{sur le corps 2.} \end{array}$$

Nous aurons identiquement, en tout point du système,

$$(130) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V = V_0 + V', \\ \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}'. \end{array} \right.$$

Ces égalités (130), jointes aux égalités (123), montrent qu'en tout point du corps 2 on a

$$(131) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial x} = \dfrac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial y} = \dfrac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial(V + \mathfrak{V})}{\partial z} = \dfrac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Moyennant ces égalités (131), les égalités (72), où l'on doit faire

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

deviennent

$$\begin{aligned} \rho_2 u_2 &= -\varepsilon \frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial x} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \\ \rho_2 v_2 &= -\varepsilon \frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial y} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \\ \rho_2 w_2 &= -\varepsilon \frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial z} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Multiplions respectivement les deux membres de chacune de ces équations par $u_2\, d\varpi_2$, $v_2\, d\varpi_2$, $w_2\, d\varpi_2$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus et intégrons pour toute la région de l'espace à laquelle s'ap-

égalités (122), en tenant compte des égalités (130), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{A}'_1}{F_1} &= -\varepsilon\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t},\\
\frac{\mathcal{B}'_1}{F_1} &= -\varepsilon\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t},\\
\frac{\mathcal{C}'_1}{F_1} &= -\varepsilon\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

De ces égalités, on déduit sans peine la nouvelle égalité

$$(134)\quad \begin{aligned}
&\int_1 \frac{\mathcal{A}'_1\dfrac{\partial\mathcal{A}'_1}{\partial t}+\mathcal{B}'_1\dfrac{\partial\mathcal{B}'_1}{\partial t}+\mathcal{C}'_1\dfrac{\partial\mathcal{C}'_1}{\partial t}}{F_1}\,d\varpi_1\\
&\quad = -\varepsilon\int_1\left[\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x}\varphi_1+\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y}\psi_1+\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z}\chi_1\right]d\varpi_1\\
&\quad\quad -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\int_1\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\varphi_1+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\psi_1+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\chi_1\right)d\varpi_1,
\end{aligned}$$

où les intégrations s'étendent à toute la région de l'espace que désigne l'indice 1.

Posons

$$(135)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{M}_2^2 &= \mathcal{A}_2^2+\mathcal{B}_2^2+\mathcal{C}_2^2,\\
\mathfrak{M}'^2_1 &= \mathcal{A}'^2_1+\mathcal{B}'^2_1+\mathcal{C}'^2_1.
\end{aligned}\right.$$

Ajoutons membre à membre les égalités (132), (133), (134), en observant que l'on a, en tout point de la région 1,

$$(120)\quad u_1 = 0,\qquad v_1 = 0,\qquad w_1 = 0,$$

et en tenant compte des égalités (54) et (69). Nous trouvons l'égalité

$$(136)\quad \begin{aligned}
&\int_2 \rho_2(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\,d\varpi_2\\
&\quad +\frac{\partial}{\partial t}\int_1\frac{\mathfrak{M}'^2_1}{2F_1}d\varpi_1+\frac{\partial}{\partial t}\int_2\frac{\mathfrak{M}_2^2}{2F_2}d\varpi_2\\
&\quad = -\varepsilon\int_2\left[\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x}u_2+\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y}v_2+\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z}w_2\right]d\varpi_2\\
&\quad\quad -\varepsilon\int\left[\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial x}\varphi+\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial y}\psi+\frac{\partial(V'+\mathfrak{V}')}{\partial z}\chi\right]d\varpi\\
&\quad\quad +\frac{\partial H}{\partial t}-\int\left[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}u+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\varphi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right.\\
&\quad\quad\quad +\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}v+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\psi\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\\
&\quad\quad\quad \left.+\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}w+\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\chi\right)\frac{\partial X}{\partial t}\right]d\varpi,
\end{aligned}$$

les intégrales qui ne portent pas d'indice s'étendant à tout l'espace.

Considérons la distribution électrique suivante :

(137)
1° Sur le corps 1

$$e = 0, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}'_1, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}'_1, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}'_1;$$

2° Sur le corps 2

$$e = e_2, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_2;$$

3° Sur les surfaces de discontinuité

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}'.$$

Soit W' le potentiel électrostatique de cette distribution (137).

Il est aisé de voir que l'on a

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = \varepsilon \int_2 \left[\frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial x} u_2 + \frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial y} v_2 + \frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial z} w_2 \right] d\varpi_2$$
$$+ \varepsilon \int \left[\frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial x} \varphi + \frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial y} \psi + \frac{\partial(V' + \mathfrak{V}')}{\partial z} \chi \right] d\varpi,$$

en sorte que l'égalité (136) devient

(138)
$$\int_2 \rho_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\, d\varpi_2$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} \int_1 \frac{\mathfrak{M}'^2_1}{2 F_1} d\varpi_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_2 \frac{\mathfrak{M}^2_2}{2 F_2} d\varpi_2$$
$$= - \frac{\partial W'}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \int \left[\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} u + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \varphi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right.$$
$$+ \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} v + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$
$$\left. + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} w + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \chi \right) \frac{\partial X}{\partial t} \right] d\varpi.$$

Les quantités α, β, γ vérifient, en tous les points du système, les égalités

(75)
$$\frac{\alpha}{f} = - \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x} - \mathfrak{L},$$
$$\frac{\beta}{f} = - \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y} - \mathfrak{M},$$
$$\frac{\gamma}{f} = - \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial z} - \mathfrak{N}.$$

Multiplions respectivement ces équations par $\alpha\, d\varpi$, $\beta\, d\varpi$, $\gamma\, d\varpi$; ajoutons membre à membre les équations obtenues et intégrons pour tout l'espace en posant

$$\mu^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

et en tenant compte de l'égalité (65). Nous trouvons l'égalité suivante :

$$(139) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mu^2}{2f}\, d\varpi = -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t} - \int \left(\mathfrak{L}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathfrak{M}\frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathfrak{N}\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\varpi.$$

La comparaison des égalités (70) et (71) donne l'identité

$$\begin{aligned}
\int \left(\mathfrak{L}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathfrak{M}\frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathfrak{N}\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\varpi
= -\int \Big[& \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, u - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\, \varphi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\
& + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, v - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\, \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\
& + \left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, w - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\, \mathrm{X} \right) \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} \Big] d\varpi.
\end{aligned}$$

En vertu de cette identité, les égalités (138) et (139) donnent l'égalité

$$(140) \qquad \begin{aligned}
& \int_2 \rho_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\, d\varpi_2 \\
& + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_1 \frac{\mathfrak{M}_1'^2}{2F_1}\, d\varpi_1 + \int_2 \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2F_2}\, d\varpi_2 + \int \frac{\mu^2}{2f}\, d\varpi + \mathrm{W}' + \mathfrak{T} - \Pi \right] = 0.
\end{aligned}$$

Multiplions par dt les deux membres de cette équation (140) et intégrons par rapport à t depuis l'instant t_0 jusqu'à un instant quelconque t, postérieur à t_0. Nous obtenons l'égalité

$$(141) \qquad \begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t} \int_2 [\rho_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\, d\varpi_2]\, dt \\
& + \int_1 \frac{\mathfrak{M}_1'^2}{2F_1}\, d\varpi_1 + \int_2 \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2F_2}\, d\varpi_2 + \int \frac{\mu^2}{2f}\, d\varpi \\
& + \mathrm{W}' + \mathfrak{T} - \Pi \\
= & \int_1 \frac{(\mathfrak{M}_1')_0^2}{2F_1}\, d\varpi_1 + \int_2 \frac{(\mathfrak{M}_2)_0^2}{2F_2}\, d\varpi_2 + \int \frac{\mu_0^2}{2f}\, d\varpi \\
& + \mathrm{W}_0' + \mathfrak{T}_0 - \Pi_0.
\end{aligned}$$

On peut toujours prendre les perturbations initiales (128) assez voisines de zéro pour que le second membre de l'égalité (141) soit inférieur à une quantité positive quelconque donnée d'avance. Si l'on admet les restrictions (124), (125) et (126), on est assuré qu'aucun des termes du premier membre ne peut être négatif. On voit donc que l'on peut prendre les perturbations initiales (128) assez petites pour que *chacun* des termes qui figurent au premier membre de l'égalité (141) demeure, quel que soit t, inférieur à une quantité positive donnée d'avance, si petite soit-elle. Il faut et il suffit pour cela que chacune des quantités (129) demeure, quel que soit t, inférieur en valeur absolue à une quantité positive quelconque donnée d'avance.

La stabilité de l'équilibre électrique sur un système immobile est donc assurée.

NOUS CONVIENDRONS, DÉSORMAIS, DE NE JAMAIS ATTRIBUER AUX QUANTITÉS λ, F, f, DE VALEURS NÉGATIVES, de telle sorte que l'équilibre d'un système immobile soit assurément stable.

CHAPITRE V.

PROPAGATION D'UNE PERTURBATION ÉLECTRIQUE DANS UN MILIEU CONTINU.

I. — *Équations générales.*

Considérons un milieu *homogène;* les quantités ρ, F, f, au lieu d'y être des fonctions de x, y, z, y sont de simples constantes. Supposons, en outre, qu'en tout point de ce milieu on ait

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0. \tag{142}$$

En vertu des égalités (17), les égalités (72) permettent d'écrire, en tout point d'un tel milieu,

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{u} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} &= \frac{4\pi}{\rho}\left[\varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial x} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right],\\
\Delta\mathfrak{v} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t} &= \frac{4\pi}{\rho}\left[\varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial y} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right],\\
\Delta\mathfrak{w} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t} &= \frac{4\pi}{\rho}\left[\varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial z} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right].
\end{aligned}\right. \tag{143}$$

De même, les égalités (19) et (74) donnent les égalités

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta f - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\,\partial t} &= 4\pi F\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial x} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right],\\
\Delta g - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y\,\partial t} &= 4\pi F\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial y} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right],\\
\Delta h - (1-\lambda)\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z\,\partial t} &= 4\pi F\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial(V-\mathfrak{V})}{\partial z} - \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right].
\end{aligned}\right. \tag{144}$$

Différentions la première des égalités (143) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial z}\right) - (1-\lambda)\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)
= \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\Delta(V-\mathfrak{V}) - \frac{4\pi}{\rho}\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{145}$$

Différentions de même la première égalité (144) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$
(146) \qquad \begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z}\right) - (1-\lambda)\,\Delta\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right) \\
&\quad = 4\pi\varepsilon \mathrm{F}\,\Delta \frac{\partial (\mathrm{V} + \mathfrak{V})}{\partial t} + 4\pi \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \mathrm{F} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (145) par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$, les deux membres de l'égalité (146) par $\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (22), (53) et (54). Nous trouvons

$$
(147) \qquad \begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) - (1-\lambda)\,\Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \\
&\quad = \frac{4\pi\varepsilon}{\rho} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Delta(\mathrm{V} + \mathfrak{V}) + 4\pi\varepsilon \mathrm{F} \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \Delta \frac{\partial (\mathrm{V} + \mathfrak{V})}{\partial t} \\
&\quad + \frac{4\pi}{\rho} \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) \\
&\quad + 4\pi \mathrm{F} \frac{\mathfrak{C}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Mais les égalités (54), jointes aux égalités (18), (20) et (22), donnent l'égalité

$$
(148) \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = 0.
$$

Moyennant cette égalité (148), l'équation (147) devient

$$
(149) \qquad \begin{aligned}
&\Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - \frac{4\pi}{\rho} \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} - 4\pi \mathrm{F} \frac{\mathfrak{C}^2}{2} \lambda \frac{\partial^3 \mathfrak{U}}{\partial t^3} \\
&\quad + 4\pi\varepsilon\left[\frac{\mathfrak{A}}{\rho\sqrt{2}} \Delta(\mathrm{V} + \mathfrak{V}) + \frac{\mathfrak{C}\mathrm{F}}{\sqrt{2}} \Delta \frac{\partial (\mathrm{V} + \mathfrak{V})}{\partial t}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

D'autre part, les équations (21) et (76) nous donnent

$$
(150) \qquad \left\{\begin{aligned}
\Delta \Phi &= \frac{4\pi f}{1 + 4\pi f}\left[\Delta \mathfrak{X} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right], \\
\Delta \Psi &= \frac{4\pi f}{1 + 4\pi f}\left[\Delta \mathfrak{Y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right], \\
\Delta \mathrm{X} &= \frac{4\pi f}{1 + 4\pi f}\left[\Delta \mathfrak{Z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned}\right.
$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (17) par $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$; les deux membres de la première égalité (19) par $\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus et la première égalité (150), en tenant compte des égalités (52), (53), (54) et (148); nous trouvons la première des égalités

$$(151)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{X} + \dfrac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)+4\pi(1+4\pi f)\,\mathfrak{u}=0,\\ \Delta\mathfrak{Y} + \dfrac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)+4\pi(1+4\pi f)\,\mathfrak{v}=0,\\ \Delta\mathfrak{Z} + \dfrac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)+4\pi(1+4\pi f)\,\mathfrak{w}=0. \end{cases}$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

En vertu des égalités (52), (72) et (74), ces égalités (151) peuvent s'écrire

$$(152)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{X} + \dfrac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\\ \qquad -\dfrac{4\pi}{\rho}(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}-4\pi F(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{C}^2}{2}\dfrac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}\\ \qquad -\dfrac{4\pi\varepsilon}{\rho}(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial x}-4\pi\varepsilon F(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial^2(V+\mathfrak{v})}{\partial x\,\partial t}=0,\\ \Delta\mathfrak{Y} + \dfrac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\\ \qquad -\dfrac{4\pi}{\rho}(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}-4\pi F(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{C}^2}{2}\dfrac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}\\ \qquad -\dfrac{4\pi\varepsilon}{\rho}(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial y}-4\pi\varepsilon F(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial^2(V+\mathfrak{v})}{\partial y\,\partial t}=0,\\ \Delta\mathfrak{Z} + \dfrac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\\ \qquad -\dfrac{4\pi}{\rho}(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}-4\pi F(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{C}^2}{2}\dfrac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}\\ \qquad -\dfrac{4\pi\varepsilon}{\rho}(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial(V+\mathfrak{v})}{\partial z}-4\pi\varepsilon F(1+4\pi f)\dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial^2(V+\mathfrak{v})}{\partial z\,\partial t}=0. \end{cases}$$

II. — *Conséquences de l'hypothèse inacceptable* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$.

Supposons, pour un instant, que nous fassions l'hypothèse

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}, \tag{51}$$

hypothèse reçue, jusqu'ici, par tous les auteurs qui ont traité de l'électrodynamique des courants de déplacement, mais hypothèse que nous savons, aujourd'hui, être inadmissible. L'égalité (53) pourra s'écrire, dans ce cas,

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathrm{V} + \mathfrak{v}) = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(\mathrm{V} + \mathfrak{v}) = \mathfrak{U}. \tag{153}$$

L'équation (149) ne renferme plus que la fonction $\mathfrak{U}$ et devient

$$\begin{aligned}\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\Delta\mathfrak{U} + (1 + 4\pi\varepsilon\mathrm{F})\Delta\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}& \\ - \frac{4\pi}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial t^2} - 4\pi\mathrm{F}\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\lambda\frac{\partial^3\mathfrak{U}}{\partial t^3} &= 0.\end{aligned} \tag{154}$$

Si l'on différentie par rapport à t les équations (152) et si l'on tient compte des égalités (153) et (158), on obtient trois équations aux dérivées partielles où ne figurent plus que les trois fonctions $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Écrivons seulement la première de ces équations

$$\begin{aligned}\Delta\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon(1 + 4\pi f)}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)& \\ + \frac{(1 + 4\pi f)(1 + 4\pi\varepsilon\mathrm{F}) - \lambda}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)& \\ - \frac{4\pi}{\rho}(1 + 4\pi f)\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2} - 4\pi\mathrm{F}(1 + 4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^3\mathfrak{X}}{\partial t^3} &= 0.\end{aligned} \tag{155}$$

Ces équations (154) et (155) peuvent être regardées comme la forme correcte sous laquelle devraient être mises les équations analogues données par Maxwell ([1]).

([1]) MAXWELL, *Traité d'électricité et de Magnétisme*. N° 783, éq. (8) et (7). (Tome II, p. 488 de la traduction française.)

III. — *Deux cas où il est légitime d'écrire des équations voisines des précédentes.*

En rejetant, comme nous devons le faire, l'hypothèse $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, nous sommes amenés, par le fait même, à rejeter l'égalité (153) et les conséquences qui s'en déduisent. Toutefois, dans deux cas particuliers, que nous allons préciser, certaines de ces conséquences redeviennent légitimes.

Le PREMIER CAS *est celui où le milieu, doué de pouvoir diélectrique, est absolument isolant.* — On a alors, en tout point de ce milieu,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Les égalités (1) et (14) donnent, pour un pareil corps,

$$\Delta \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{156}$$

en sorte que l'égalité (53) permet d'écrire

$$\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}} \Delta \frac{\partial (V + \mathfrak{V})}{\partial t} = \Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \tag{156 bis}$$

relation qui représente une conséquence, *légitime dans ce cas,* de l'égalité *illégitime* (153).

Le DEUXIÈME CAS *est celui où le milieu est conducteur, mais privé de pouvoir diélectrique.* — On a alors, en tout point du milieu,

$$\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{C} = 0.$$

L'équation (15) devient

$$\Delta \mathfrak{V} = 0. \tag{157}$$

L'équation (53) permet d'écrire la relation

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Delta (V + \mathfrak{V}) = \Delta \mathfrak{U}. \tag{157 bis}$$

IV. — *Milieu isolant.*

Pour un milieu isolant, où ρ est infini, l'équation (149) devient, en tenant compte de l'égalité (156 *bis*), et en posant

$$\Omega = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \tag{158}$$

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F} \frac{1}{\lambda} \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}} \Delta\Omega - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0. \tag{159}$$

Sɪ ʟᴀ ᴄᴏɴsᴛᴀɴᴛᴇ λ ᴇsᴛ ᴘᴏsɪᴛɪᴠᴇ, *la fonction Ω vérifie, en tout point d'un milieu isolant, l'équation canonique des petits mouvements, la vitesse de propagation ayant pour valeur*

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}} \frac{\sqrt{1 + 4\pi\varepsilon F}}{\sqrt{4\pi\varepsilon F \lambda}}. \tag{160}$$

Sɪ ʟᴀ ᴄᴏɴsᴛᴀɴᴛᴇ λ ᴇsᴛ ᴇ́ɢᴀʟᴇ *à* 0, *la fonction Ω vérifie, en tout point du milieu isolant, l'équation de Laplace.*

De cette proposition on peut en déduire une autre dont le sens est plus concret.

Soit

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right) \tag{161}$$

la densité du fluide fictif équivalant à la polarisation diélectrique. On a, en général, en vertu de l'égalité (15),

$$\Delta \mathfrak{V} = -4\pi\sigma,$$

et, par conséquent,

$$\Delta \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

$\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ est ce que nous nommerons la *vitesse de condensation du fluide diélectrique fictif.*

Dans le cas particulier qui nous occupe, cette égalité devient, en vertu des égalités (158) et (156),

$$\Delta\Omega = -4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{162}$$

Les égalités (159) et (162) nous montrent alors que l'on a

$$(163)\qquad \frac{1-4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\,\Delta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)=0.$$

Si la constante λ est positive *la vitesse de condensation du fluide diélectrique fictif vérifie, en tout point d'un milieu isolant, l'équation canonique des petits mouvements, la vitesse de propagation ayant la valeur* (160). Si la constante λ est égale a zéro, *cette vitesse de condensation vérifie l'équation de Laplace.*

Considérons maintenant la première des égalités (152). Donnons-y à ρ une valeur infinie. En vertu des égalités (74), elle pourra s'écrire

$$\Delta\mathfrak{X}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)$$
$$+4\pi\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\,\varphi=0.$$

Différentions deux fois cette égalité par rapport à t. Elle deviendra

$$\Delta\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\mathfrak{X}}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\partial^3\mathfrak{Y}}{\partial y\,\partial t^2}+\frac{\partial^3\mathfrak{Z}}{\partial z\,\partial t^2}\right)$$
$$+4\pi\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$$

Dans cette égalité, remplaçons $\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{Y}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{Z}}{\partial t^2}$ par leurs valeurs déduites des égalités (74) et nous trouvons

$$\Delta\varphi+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)-4\pi\frac{\mathfrak{C}^2}{2}F(1+4\pi f)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$
$$+\frac{(1+4\pi\varepsilon f)\varepsilon F}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial t}=0.$$

Mais, dans le cas actuel, on a, en vertu de l'égalité (156),

$$\Delta\frac{\partial(V+\mathfrak{V})}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right).$$

L'égalité précédente devient donc la première des égalités

$$
(164)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta\varphi + \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\
&\qquad -(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F\frac{\mathfrak{C}^2}{2\varepsilon}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,\\
&\Delta\psi + \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\
&\qquad -(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F\frac{\mathfrak{C}^2}{2\varepsilon}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,\\
&\Delta\chi + \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)\\
&\qquad -(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F\frac{\mathfrak{C}^2}{2\varepsilon}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}\right.
$$

On peut donc former trois équations aux dérivées partielles qui lient entre elles les trois composantes du flux de déplacement en tout point d'un milieu isolant. Ces équations sont de même forme que les équations des petits mouvements d'un solide élastique isotrope.

A ces équations on peut appliquer une proposition démontrée par Clebsch pour les équations des petits mouvements des corps isotropes. *On peut écrire*

$$
(165)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial z},\\
\psi &= \frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial l}{\partial z}-\frac{\partial n}{\partial x},\\
\chi &= \frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial m}{\partial x}-\frac{\partial l}{\partial y},
\end{aligned}\right.
$$

a étant une fonction de x, y, z, t qui vérifie l'équation

$$
(166)\quad \frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\,\Delta a-\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}=0,
$$

c'est-à-dire l'équation canonique des petits mouvements où la vitesse de propagation a une valeur $\mathfrak{T}$ donnée par l'égalité (160), *tandis que l, m, n sont des fonctions de x, y, z, t dont chacune vérifie l'équation*

$$
(167)\quad \frac{1}{(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F}\,\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\,\Delta p-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0,
$$

c'est-à-dire pour l'équation canonique des petits mouvements, où la vitesse de propagation a la valeur

$$(168) \qquad \tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}} \frac{1}{\sqrt{(1+4\pi f)\,4\pi\varepsilon F}}.$$

Helmholtz (¹) a donné des équations semblables aux équations (164), mais portant sur les composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de la polarisation. Pour obtenir les équations de Helmholtz, il suffit de suivre une marche analogue à celle qui nous a fourni les équations (164), en différentiant une fois seulement les égalités (152) par rapport à t et en supposant que

$$\Delta V = 0,$$

c'est-à-dire que le diélectrique mauvais conducteur ne renferme pas de charge électrique répandue dans sa masse. Les équations (164) sont indépendantes de cette hypothèse.

V. — *Milieu conducteur non diélectrique.*

Considérons maintenant un milieu conducteur, mais privé de pouvoir diélectrique, en sorte que $F = 0$. L'équation (149) devient

$$\Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - \frac{4\pi}{\rho} \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \Delta(V - \mathfrak{V}) = 0.$$

En vertu de l'égalité (157 *bis*), cette égalité devient

$$(169) \qquad 4\pi\varepsilon\,\Delta \mathfrak{U} - \rho\,\Delta \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - 4\pi \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction $\mathfrak{U}$ au sein d'un milieu non diélectrique.

La nature des intégrales de cette équation varie beaucoup avec la grandeur relative des trois constantes positives

$$4\pi\varepsilon, \quad \rho, \quad 4\pi \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda.$$

(¹) H. HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*. Equations (21) (*Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 625).

Considérons seulement le *cas d'un conducteur parfait*, c'est-à-dire le cas où l'on a

(170) $$\rho = 0.$$

1° LA CONSTANTE λ A UNE VALEUR POSITIVE. — L'équation (169) peut alors s'écrire

(171) $$\frac{2\varepsilon}{\mathfrak{A}^2\lambda}\Delta\mathfrak{U} - \frac{\partial^2\mathfrak{U}}{\partial t} = 0.$$

Dans un conducteur parfait dénué de pouvoir diélectrique, la fonction $\mathfrak{U}$ *vérifie une équation canonique des petits mouvements où la vitesse de propagation a pour valeur*

(172) $$\mathfrak{E} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}\sqrt{\lambda}}.$$

2° LA CONSTANTE λ EST ÉGALE A 0. L'équation (169) devient alors

(173) $$\Delta\mathfrak{U} = 0.$$

La fonction $\mathfrak{U}$ *vérifie l'équation de Laplace.*

On peut donner de ces propositions une conséquence concrète. L'équation (157), jointe à l'égalité (14), nous permet d'écrire, dans le cas actuel,

$$\Delta\mathfrak{U} = -4\pi\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}e,$$

e étant la densité de l'électricité libre. Dès lors, on voit sans peine que l'on peut déduire des équations (169), (171) et (173) les équations suivantes, vérifiées par la densité de l'électricité libre

(174) $$4\pi\varepsilon\,\Delta e - \rho\,\Delta\frac{\partial e}{\partial t} - 4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0,$$

(175) $$\frac{2\varepsilon}{\mathfrak{A}^2\lambda}\Delta e - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0,$$

(176) $$\Delta e = 0.$$

Les équations (175) et (176) peuvent s'énoncer de la manière suivante :

SI LA CONSTANTE λ A UNE VALEUR POSITIVE, *dans un conducteur parfait, dénué de pouvoir diélectrique, la densité électrique vérifie l'équation canonique des petits mouvements, la vitesse de propagation étant donnée par l'égalité* (172).

SI LA CONSTANTE λ EST ÉGALE A 0, *dans les mêmes conditions, la densité électrique vérifie l'équation de Laplace.*

Considérons maintenant la première des égalités (152). Donnons-y à F la valeur 0. En vertu des égalités (72), elle pourra s'écrire

$$\Delta \mathfrak{X} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) + 4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)u = 0.$$

Différentions cette égalité par rapport à t. Elle deviendra

$$\Delta \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) + 4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f)\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$, par leurs valeurs déduites des égalités (72). Elle deviendra

$$\Delta u + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+4\pi f)}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x}\Delta(V+\mathfrak{V}) = 0.$$

Or les équations (14) et (157) donnent, dans le cas actuel,

$$\Delta(V+\mathfrak{V}) = -4\pi e.$$

On obtient donc la première des équations suivantes

$$(177)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta u + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\qquad - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial e}{\partial x} = 0, \\
&\Delta v + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\qquad - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial e}{\partial y} = 0, \\
&\Delta w + \frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\qquad - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial e}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right.$$

De ces équations on peut en déduire d'autres qui ne renferment plus que les trois fonctions u, v, w. Il suffit de différentier les égalités (177) par rapport à t, en tenant compte de l'égalité (1). Nous trouvons ainsi les équations

$$(178)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad+\Delta\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad-\frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad+\Delta\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad-\frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{4\pi(1+4\pi f)\varepsilon}{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad+\Delta\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1+4\pi f-\lambda}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad-\frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations s'éclairent par une transformation analogue à la transformation de Clebsch pour les équations des petits mouvements d'un solide isotrope.

On peut écrire

$$(179)\quad \left\{\begin{aligned}
u&=\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial z},\\
v&=\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{l}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{n}}{\partial x},\\
w&=\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{l}}{\partial y},
\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{a}$ étant une fonction de x, y, z, t qui vérifie l'équation

$$(180)\quad 4\pi\varepsilon\,\Delta\mathfrak{a}+\rho\,\Delta\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial t}-4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2\mathfrak{a}}{\partial t^2}=0,$$

semblable aux équations (169) *et* (174), *tandis que* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *sont des fonc-*

tions de x, y, z, t, dont les dérivées par rapport au temps $\frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial t}$, *vérifient toutes trois l'équation*

$$\Delta p - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{181}$$

qui appartient au même type que l'équation de la conductibilité calorifique dans un milieu homogène et isotrope.

VI. — *Actions magnétiques.*

Revenons maintenant aux équations générales (152).

Différentions la deuxième de ces équations par rapport à z, la troisième par rapport à y et retranchons membre à membre le premier résultat du second en tenant compte de la première des égalités (76).

Nous trouvons la première des égalités suivantes

$$(182)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta\alpha - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta\beta - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \beta}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta\gamma - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

En vertu des équations (75) et (79), ces équations peuvent encore s'écrire

$$(183)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta L - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial L}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta M - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial M}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = 0,\\ &\Delta N - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial N}{\partial t} - 4\pi F(1+4\pi f)\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Maxwell aurait pu déduire ces équations des équations, d'ailleurs inexactes, qu'il a données au n° 783 de son Traité.

Les équations précédentes sont générales. Que deviennent-elles dans les deux cas particuliers auxquels nous nous sommes longuement arrêtés?

Dans un milieu entièrement isolant, où $\rho = \infty$, les quantités α, β, γ,

L, M, N *vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$(167)\qquad \frac{1}{(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F}\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\Delta p - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

Dans un milieu privé de pouvoir diélectrique, où $F = 0$, *les quantités* α, β, γ, L, M, N, *vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$(181)\qquad \Delta p - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Le premier de ces deux résultats a été démontré par Helmholtz [1].

VII. — *Récapitulation.*

Si nous nous bornons soit aux milieux isolants, soit aux milieux privés de pouvoir diélectrique, nous trouvons que les diverses quantités qui figurent dans nos théories vérifient des équations aux dérivées partielles appartenant à un petit nombre de types qui sont les suivants :

1° *Corps isolant.* — Les quantités $\Omega = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$, a vérifient une équation aux dérivées partielles du type

$$(159)\qquad \frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}\frac{1}{\lambda}\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\Delta p - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

Les fonctions l, m, n, α, β, γ vérifient une équation aux dérivées partielles du type

$$(167)\qquad \frac{1}{(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F}\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{C}^2}{2}}\Delta p - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

2° *Corps privé de pouvoir diélectrique.* — Les fonctions $\mathfrak{U}$, e, a vérifient une équation du type

$$(169)\qquad 4\pi\varepsilon\,\Delta p + \rho\,\Delta\frac{\partial p}{\partial t} - 4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

---

[1] HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*. Équations (21 *d*) (*Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 625).

Les fonctions $\frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial t}$, α, β, γ vérifient une équation du type

$$\Delta p - \frac{4\pi(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0. \tag{181}$$

Nous désignerons les équations (159) et (169) comme les *équations d'une perturbation électrostatique*, tandis que les équations (167) et (181) seront les *équations d'une perturbation électromagnétique;* CES MOTS N'ONT D'AUTRE SENS QUE CELUI D'UNE NOTATION.

Dans un corps privé de pouvoir diélectrique, l'équation des perturbations électromagnétiques est du même type que l'équation de la conductibilité calorifique; *il n'y a pas d'onde électromagnétique.*

Dans un corps isolant, l'équation des perturbations électromagnétiques est une équation canonique des petits mouvements; *il y a une onde électromagnétique qui se propage avec une vitesse*

$$\tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}} \frac{1}{\sqrt{(1+4\pi f)4\pi\varepsilon F}}. \tag{168}$$

Dans un corps isolant, l'équation des perturbations électrostatiques est une équation canonique des petits mouvements; *il y a une onde électrostatique qui se propage avec une vitesse*

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{C}} \frac{\sqrt{1+4\pi\varepsilon F}}{\sqrt{4\pi\varepsilon F}\sqrt{\lambda}}. \tag{160}$$

Dans un corps privé de pouvoir diélectrique, l'existence ou la non-existence des ondes électrostatiques dépend des grandeurs relatives des quantités

$$4\pi\varepsilon, \quad \rho, \quad 4\pi\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda.$$

Dans un conducteur parfait, où $\rho = 0$, l'équation des perturbations électrostatiques devient

$$\frac{2\varepsilon}{\mathfrak{A}^2\lambda}\Delta p - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{171}$$

C'est une ique des petits mouvements; *il y a une onde*

électrostatique qui se propage avec une vitesse

$$\mathfrak{E} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{172}$$

L'expérience semble confirmer cette vue de Maxwell :

Dans l'éther diélectrique, la vitesse de propagation d'une perturbation électromagnétique est égale à la vitesse de la lumière dans le même milieu.

Nous avons vu ailleurs (¹) que cette proposition entraînait la conséquence suivante :

On a

$$\frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2} = \frac{1 + 4\pi\varepsilon F_0}{4\pi\varepsilon F_0}, \tag{184}$$

F_0 *étant le coefficient de polarisation diélectrique de l'éther.*

Désignons par $\mathfrak{C}_0$ la vitesse de propagation d'une onde électrostatique dans l'éther. Les équations (160), (172) et (184) donnent l'égalité

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{E}. \tag{185}$$

D'où la proposition suivante :

Si une perturbation électromagnétique se propage dans l'éther avec la même vitesse que la lumière, une perturbation électrostatique se propage avec la même vitesse dans l'éther diélectrique et dans un conducteur parfait privé de pouvoir diélectrique.

Nous avons marqué, dans un autre Travail (²), le rôle capital que cette proposition paraît appelée à jouer dans le domaine de l'Électrodynamique.

(¹) *Quelques remarques au sujet de l'électrodynamique des corps diélectriques proposée par J.-Clerk Maxwell*, § IX.

(²) *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'éclairage électrique*, t. IV, p. 494; 1895).

CHAPITRE VI.

CONDITIONS A LA SURFACE LIMITE DE DEUX MILIEUX.

I. — *Conditions à la limite commune de deux milieux isolants.*

Les conditions qui doivent être vérifiées à la limite de deux milieux offrent d'étroites analogies avec les conditions qui sont vérifiées en tout point d'un milieu illimité.

Considérons, en premier lieu, la surface de contact de deux milieux isolants doués de pouvoir diélectrique. Soient 1 et 2 ces deux milieux.

En chacun de ces deux milieux, et jusqu'au voisinage de la surface de contact, on peut écrire des équations telles que les équations (74).

$$(186)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi_1}{F_1} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial x\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{X}_1}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\psi_1}{F_1} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial y\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}_1}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\chi_1}{F_1} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial z\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}_1}{\partial t^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(186\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi_2}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial x\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{X}_2}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\psi_2}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial y\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Y}_2}{\partial t^2} = 0,\\ &\frac{\chi_2}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial^2(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial z\,\partial t} + \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}_2}{\partial t^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement les équations (186) par $\cos(n_1, x)$, $\cos(n_1, y)$, $\cos(n_1, z)$; les équations (186 *bis*) par $\cos(n_2, x)$, $\cos(n_2, y)$, $\cos(n_2, z)$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (54), (36), (39) et (42), qui donnent, quel que soit t, en tout point de la surface,

$$(187)\qquad \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2,\qquad \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2,\qquad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2,$$

et nous trouverons

$$(188)\qquad \frac{\varphi_1\cos(n_1,x)+\psi_1\cos(n_1,y)+\chi_1\cos(n_1,z)}{F_1} + \frac{\varphi_2\cos(n_2,x)+\psi_2\cos(n_2,y)+\chi_2\cos(n_2,z)}{F_2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial n_2}\right)=0.$$

Mais les égalités (2) et (28) donnent

$$(189)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}\right)=4\pi[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z) + u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)],$$

égalité qui devient

$$(190)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}\right)=0,$$

puisque les deux milieux 1 et 2 sont supposés isolants.

D'autre part, les égalités (3) et (29) donnent l'égalité

$$(191)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial n_2}\right)=4\pi[\varphi_1\cos(n_1,x)+\psi_1\cos(n_1,y)+\chi_1\cos(n_1,z) + \varphi_2\cos(n_2,x)+\psi_2\cos(n_2,y)+\chi_2\cos(n_2,z)].$$

Les égalités (188), (190) et (191) donnent l'égalité

$$(192)\qquad \frac{1+4\pi\varepsilon F_1}{F_1}[\varphi_1\cos(n_1,x)+\psi_1\cos(n_1,y)+\chi_1\cos(n_1,z)] + \frac{1+4\pi\varepsilon F_2}{F_2}[\varphi_2\cos(n_2,x)+\psi_2\cos(n_2,y)+\chi_2\cos(n_2,z)]=0,$$

ou bien, en vertu des égalités (74) et (77),

$$(192\ bis)\qquad (1+4\pi\varepsilon F_1)\frac{\partial}{\partial t}[X_1\cos(n_1,x)+Y_1\cos(n_1,y)+Z_1\cos(n_1,z)] + (1+4\pi\varepsilon F_2)\frac{\partial}{\partial t}[X_2\cos(n_2,x)+Y_2\cos(n_2,y)+Z_2\cos(n_2,z)]=0.$$

D'autre part, si nous désignons par T une direction quelconque, tangente à la surface de contact, les équations (186), (186 *bis*), (187), (29) et (32) donnent l'égalité

$$(193)\qquad \frac{1}{F_1}[\varphi_1\cos(T,x)+\psi_1\cos(T,y)+\chi_1\cos(T,z)] = \frac{1}{F_2}[\varphi_2\cos(T,x)+\psi_2\cos(T,y)+\chi_2\cos(T,z)].$$

Cette égalité peut encore s'écrire, en vertu des égalités (74) et (77),

$$(193\ bis)\qquad \frac{\partial}{\partial t}[X_1\cos(T,x)+Y_1\cos(T,y)+Z_1\cos(T,z)] = \frac{\partial}{\partial t}[X_2\cos(T,x)+Y_2\cos(T,y)+Z_2\cos(T,z)].$$

Telles sont les conditions auxquelles sont assujettis les flux de déplacement à la surface de contact de deux corps isolants quelconques.

II. — *Conditions à la limite commune de deux conducteurs dénués de pouvoir diélectrique.*

Les équations (72) nous permettent d'écrire

$$(194)\qquad \begin{cases} \rho_1 u_1 + \varepsilon\dfrac{\partial(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial x} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} = 0, \\ \rho_1 v_1 + \varepsilon\dfrac{\partial(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial y} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t} = 0, \\ \rho_1 w_1 + \varepsilon\dfrac{\partial(V_1+\mathfrak{V}_1)}{\partial z} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

$$(194\ bis)\qquad \begin{cases} \rho_2 u_2 + \varepsilon\dfrac{\partial(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial x} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial t} = 0, \\ \rho_2 v_2 + \varepsilon\dfrac{\partial(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial y} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{Y}_2}{\partial t} = 0, \\ \rho_2 w_2 + \varepsilon\dfrac{\partial(V_2+\mathfrak{V}_2)}{\partial z} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{Z}_2}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Multiplions respectivement les équations (194) par $\cos(n_1,x)$, $\cos(n_1,y)$, $\cos(n_1,z)$ et les équations (194 *bis*) par $\cos(n_2,x)$, $\cos(n_2,y)$, $\cos(n_2,z)$. Ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (187), et nous trouvons l'égalité suivante :

$$(195)\qquad \begin{aligned} &\rho_1[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)] \\ &+\rho_2[u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)] \\ &+\varepsilon\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial n_2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Mais, comme les milieux 1 et 2 sont dénués de pouvoir diélectrique, l'égalité (31) devient

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial n_2} = 0.$$

La condition (195) devient donc, en tenant compte de l'égalité (28),

$$(196)\qquad \begin{aligned} &\rho_1[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)]\\ &+\rho_2[u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)]=4\pi\varepsilon\mathrm{E}. \end{aligned}$$

Si l'on différentie l'égalité (196) par rapport à t, en tenant compte de l'égalité (2), on trouve l'égalité

$$(197)\qquad \begin{aligned} &4\pi\varepsilon[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)\\ &\quad+u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)]\\ &+\rho_1\frac{\partial}{\partial t}[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)]\\ &+\rho_2\frac{\partial}{\partial t}[u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z)]=0. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (72) et (78), cette égalité peut encore s'écrire

$$(197\,bis)\qquad \begin{aligned} &\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}[\mathcal{X}_1\cos(n_1,x)+\mathcal{Y}_1\cos(n_1,y)+\mathcal{Z}_1\cos(n_1,z)]\\ &+\frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{X}_1\cos(n_1,x)+\mathcal{Y}_1\cos(n_1,y)+\mathcal{Z}_1\cos(n_1,z)]\\ &+\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}[\mathcal{X}_2\cos(n_2,x)+\mathcal{Y}_2\cos(n_2,y)+\mathcal{Z}_2\cos(n_2,z)]\\ &+\frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{X}_2\cos(n_2,x)+\mathcal{Y}_2\cos(n_2,y)+\mathcal{Z}_2\cos(n_2,z)]=0. \end{aligned}$$

D'autre part, moyennant les égalités (187), (29) et (32), les égalités (194) et (194 *bis*) permettent d'écrire la condition

$$(198)\qquad \begin{aligned} &\rho_1[u_1\cos(\mathrm{T},x)+v_1\cos(\mathrm{T},y)+w_1\cos(\mathrm{T},z)]\\ &=\rho_2[u_2\cos(\mathrm{T},x)+v_2\cos(\mathrm{T},y)+w_2\cos(\mathrm{T},z)]. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (72) et (78), cette égalité peut encore s'écrire

$$(198\,bis)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{X}_1\cos(\mathrm{T},x)+\mathcal{Y}_1\cos(\mathrm{T},y)+\mathcal{Z}_1\cos(\mathrm{T},z)\\ &=\mathcal{X}_2\cos(\mathrm{T},x)+\mathcal{Y}_2\cos(\mathrm{T},y)+\mathcal{Z}_2\cos(\mathrm{T},z). \end{aligned}$$

Les équations (196), (197), (198) représentent les conditions vérifiées à la surface de contact de deux milieux privés de pouvoir diélectrique.

III. — *Conditions vérifiées par les composantes de l'aimantation à la surface de séparation de deux milieux.*

Pour établir ces conditions, il n'est plus nécessaire de faire aucune restriction sur la valeur de la conductibilité ou du pouvoir diélectrique des deux milieux.

La première des égalités (76) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(n_1,x)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(n_2,x)\\
&\quad=-\frac{\partial(\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{Z}_2)}{\partial y}\cos(n_1,x)+\frac{\partial(\mathfrak{Y}_1-\mathfrak{Y}_2)}{\partial z}\cos(n_1,x).
\end{aligned}$$

Les égalités (54), (38), (41), (44) donnent

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{Z}_2)}{\partial y}&=\left(\frac{\partial X_1}{\partial n_1}+\frac{\partial X_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,y)\\
\frac{\partial(\mathfrak{Y}_1-\mathfrak{Y}_2)}{\partial z}&=\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,z),
\end{aligned}$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(n_1,x)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(n_2,x)\\
&\quad=-\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial n_1}+\frac{\partial X_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,y)-\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,z)\right]\cos(n_1,x).
\end{aligned}$$

Moyennant les égalités (43) et l'identité

$$\cos^2(n_1,x)+\cos^2(n_1,y)+\cos^2(n_1,z)=1,$$

l'égalité précédente se transforme en la première des égalités

$$(199)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(n_1,x)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(n_2,x)\\
&\quad=4\pi[\alpha_1\cos(n_1,x)+\alpha_2\cos(n_2,x)]\\
&\qquad-4\pi\cos^2(n_1,x)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\
&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\beta_1\cos(n_1,y)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\beta_2\cos(n_2,y)\\
&\quad=4\pi[\beta_1\cos(n_1,y)+\beta_2\cos(n_2,y)]\\
&\qquad-4\pi\cos^2(n_1,y)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\
&\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\gamma_1\cos(n_1,z)+\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\gamma_2\cos(n_2,z)\\
&\quad=4\pi[\gamma_1\cos(n_1,z)-\gamma_2\cos(n_2,z)]\\
&\qquad-4\pi\cos^2(n_1,z)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_1,z)].
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

En ajoutant membre à membre les trois équations (199), on trouve

$$(200)\quad \frac{1+4\pi f_1}{f_1}[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)] + \frac{1+4\pi f_2}{f_2}[\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)]=0.$$

En vertu des égalités (75) et (79), cette égalité peut encore s'écrire

$$(200\ bis)\quad (1+4\pi f_1)[\mathrm{L}_1\cos(n_1,x)+\mathrm{M}_1\cos(n_1,y)+\mathrm{N}_1\cos(n_1,z)] + (1+4\pi f_2)[\mathrm{L}_2\cos(n_2,x)+\mathrm{M}_2\cos(n_2,y)+\mathrm{N}_2\cos(n_2,z)]=0.$$

Soit maintenant T une direction tangente à la surface de discontinuité. La première des égalités (76) nous donnera

$$\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(\mathrm{T},x)-\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(\mathrm{T},x) = -\frac{\partial(\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{Z}_2)}{\partial y}\cos(\mathrm{T},x)+\frac{\partial(\mathfrak{Y}_1-\mathfrak{Y}_2)}{\partial z}\cos(\mathrm{T},x).$$

En vertu des égalités (54), (38), (41), (44), cette égalité deviendra

$$\frac{1+4\pi f_1}{f_1}\alpha_1\cos(\mathrm{T},x)-\frac{1+4\pi f_2}{f_2}\alpha_2\cos(\mathrm{T},x) = -\left[\left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,y)-\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2}\right)\cos(n_1,z)\right]\cos(\mathrm{T},x).$$

Moyennant les égalités (43) et l'identité

$$\cos^2(n_1,x)+\cos^2(n_1,y)+\cos^2(n_1,z)=1,$$

l'égalité précédente devient la première des égalités

$$(201)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha_1}{f_1}-\frac{\alpha_2}{f_2}\right)\cos(\mathrm{T},x)\\
&\quad=-4\pi\cos(n_1,x)\cos(\mathrm{T},x)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\
&\left(\frac{\beta_1}{f_1}-\frac{\beta_2}{f_2}\right)\cos(\mathrm{T},y)\\
&\quad=-4\pi\cos(n_1,y)\cos(\mathrm{T},y)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)],\\
&\left(\frac{\gamma_1}{f_1}-\frac{\gamma_2}{f_2}\right)\cos(\mathrm{T},z)\\
&\quad=-4\pi\cos(n_1,z)\cos(\mathrm{T},z)[\alpha_1\cos(n_1,x)+\beta_1\cos(n_1,y)+\gamma_1\cos(n_1,z)\\
&\qquad\qquad+\alpha_2\cos(n_2,x)+\beta_2\cos(n_2,y)+\gamma_2\cos(n_2,z)].
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

Si l'on ajoute membre à membre ces égalités (201) en tenant compte de l'identité

$$\cos(n_1, x)\cos(T, x) + \cos(n_1, y)\cos(T, y) + \cos(n_1, z)\cos(T, z) = 0,$$

on trouve l'égalité

$$(202) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{f_1}[\alpha_1 \cos(T, x) + \beta_1 \cos(T, y) + \gamma_1 \cos(T, z)] \\ &= \frac{1}{f_2}[\alpha_2 \cos(T, x) + \beta_2 \cos(T, y) + \gamma_2 \cos(T, z)], \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire, en vertu des égalités (75) et (79),

$$(202\ bis) \qquad \begin{aligned} &L_1 \cos(T, x) + M_1 \cos(T, y) + N_1 \cos(T, z) \\ &= L_2 \cos(T, x) + M_2 \cos(T, y) + N_2 \cos(T, z). \end{aligned}$$

On remarquera l'analogie de forme des égalités (200) et (200 *bis*), (202) et (202 *bis*), qui expriment les conditions vérifiées par les composantes de l'aimantation à la surface de séparation de deux milieux quelconques, avec les équations (192) et (192 *bis*), (193) et (193 *bis*) qui expriment les conditions vérifiées par les composantes des flux de déplacement à la surface de séparation de deux milieux non conducteurs.

IV. — *Forme des conditions aux limites données par divers auteurs.*

Maxwell ne s'est pas occupé d'établir les conditions vérifiées à la limite de deux milieux. Ses disciples ont cherché à combler les lacunes du maître.

M. Potier paraît s'être occupé le premier de la question dans une Note insérée dans la traduction française du *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell [1].

Pour les quantités X, Y, Z, M. Potier trouve les conditions (193 *bis*). Quant à la condition (192 *bis*), il les remplace par la condition

$$(203) \qquad \begin{aligned} &F_1 \frac{\partial}{\partial t}[X_1 \cos(n_1, x) + Y_1 \cos(n_1, y) + Z_1 \cos(n_1, z)] \\ &+ F_2 \frac{\partial}{\partial t}[X_2 \cos(n_2, x) + Y_2 \cos(n_2, y) + Z_2 \cos(n_2, z)] = 0. \end{aligned}$$

---

[1] Tome II, p. 507-508.

Son raisonnement, qui est exact, lui aurait fait trouver l'équation (192 *bis*), s'il n'avait pas fait usage d'une relation, empruntée à Maxwell, et faussée par la confusion, habituelle à ce physicien, des deux quantités

$$4\pi\varepsilon F \quad \text{et} \quad (1 + 4\pi\varepsilon F).$$

Quant aux quantités L, M, N, M. Potier les déclare continues à la surface de séparation, ce qui paraît en contradiction avec l'égalité (200 *bis*); mais la contradiction n'est qu'apparente, M. Potier ayant commencé par supposer que l'on avait affaire à des milieux non magnétiques, c'est-à-dire que l'on avait

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0.$$

Peu de temps après, H. Hertz [1] donnait pour les quantités X, Y, Z des conditions identiques, à la surface de séparation de deux milieux diélectriques, aux conditions (193 *bis*) et (203), c'est-à-dire aux conditions obtenues par M. Potier. Quant aux quantités L, M, N, il donne les conditions (202 *bis*) et la condition que l'on obtient en différentiant l'égalité (200 *bis*) par rapport à t. Mais, en un autre endroit de son Mémoire [2], Hertz écrit que l'on a

$$(1 + 4\pi f_1)\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial n_1} + (1 + 4\pi f_2)\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial n_2} = 0,$$

égalité qui n'est compatible avec la condition (200 *bis*) que pour un système en équilibre.

Vers le même moment, Cohn [3] admet que l'on a, à la surface de séparation de deux milieux,

$$\begin{aligned}(u_1 + \varphi_1)\cos(n_1, x) + (v_1 + \psi_1)\cos(n_1, y) + (w_1 + \chi_1)\cos(n_1, z)\\ + (u_2 + \varphi_2)\cos(n_2, x) + (v_2 + \psi_2)\cos(n_2, y) + (w_2 + \chi_2)\cos(n_2, z) = 0,\end{aligned}$$

condition qui se réduit, dans le cas où les deux milieux ne sont pas conduc-

---

(1) H. Hertz, *loc. cit.*, équations (8_a), (8_b), (8_c), (8_d), p. 589.

(2) H. Hertz, *loc. cit.*, p. 608.

(3) Cohn, *loc. cit.*, équations (7_a), (7_b), p. 628.

teurs, à l'égalité

$$(204) \quad \begin{aligned} &\varphi_1 \cos(n_1, x) + \psi_1 \cos(n_1, y) + \chi_1 \cos(n_1, z) \\ &+ \varphi_2 \cos(n_2, x) + \psi_2 \cos(n_2, y) + \chi_2 \cos(n_2, z) = 0, \end{aligned}$$

qui équivaut évidemment à l'égalité (203).

En outre, il donne, au lieu de l'égalité (200), l'égalité

$$(205) \quad \begin{aligned} &\alpha_1 \cos(n_1, x) + \beta_1 \cos(n_1, y) + \gamma_1 \cos(n_1, z) \\ &+ \alpha_2 \cos(n_2, x) + \beta_2 \cos(n_2, y) + \gamma_2 \cos(n_2, z) = 0. \end{aligned}$$

Ces divergences montrent combien il était nécessaire d'obtenir les conditions aux limites par des méthodes précises.

CHAPITRE VII.

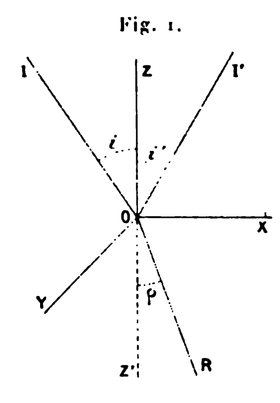
RÉFLEXION ET RÉFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX MILIEUX DIÉLECTRIQUES.

I. — *Le vecteur électrique est perpendiculaire au plan d'incidence.*

Nous ne voulons pas examiner ici, dans toute son ampleur, le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques à la surface de séparation de deux milieux diélectriques différents. Ce problème présente de grandes difficultés. Nous nous contenterons de prouver que certaines solutions qui ont été proposées pour ce problème sont inacceptables. Les résultats, tout négatifs, que nous obtiendrons ainsi, seront cependant de quelque poids dans la discussion de la théorie électromagnétique de la lumière.

Nous supposerons que deux diélectriques, désignés par les indices 1 et 2, soient séparés par une surface plane. Nous prendrons cette surface pour

Fig. 1.



plan des (x, y) (*fig.* 1). Nous prendrons pour axe des z la normale à cette surface dirigée vers l'intérieur du milieu 1.

Nous supposerons qu'une onde électromagnétique plane vienne tomber sur cette surface de séparation. Soit IO sa direction de propagation, située dans le plan ZOX. Soit i l'angle d'incidence.

Imaginons que le vecteur (X_1, Y_1, Z_1) qu'elle propage soit *perpendiculaire au plan d'incidence*. Supposons, en outre, que ce vecteur soit une

fonction périodique simple de t, ayant pour période T. Soit τ_1 [égalité (168)] la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu 1.

Au point (x, y, z) du milieu 1, à l'instant t, le vecteur électrique (X_1, Y_1, Z_1) aura pour composantes

$$(206)\quad \begin{cases} X_1 = 0, \\ Y_1 = B_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - b_1\right), \\ Z_1 = 0, \end{cases}$$

B_1, b_1 étant deux constantes.

Nous allons chercher si la perturbation électrique réfléchie et la perturbation électrique réfractée peuvent être, l'une et l'autre, formées par une onde plane propageant un vecteur électrique situé dans l'onde.

La direction de propagation OI' de l'onde réfléchie et la direction de propagation OR de l'onde réfractée sont nécessairement, par raison de symétrie, situées dans le plan d'incidence ZOX. Les composantes du vecteur réfléchi, en un point (x, y, z) du milieu 2, à l'instant t, seront, en désignant par i' l'angle de réflexion,

$$(207)\quad \begin{cases} X'_1 = A'_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' - z\cos i'}{\tau_1 T} - a'_1\right)\cos i', \\ Y'_1 = B'_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i'}{\tau_1 T} - b_1\right), \\ Z'_1 = -A'_1 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' - z\cos i'}{\tau_1 T} - a'_1\right)\sin i', \end{cases}$$

A'_1, B'_1, a'_1, b'_1 étant quatre constantes.

Si nous désignons par ρ l'angle de réfraction et par τ_2 la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu 2, nous trouvons que les composantes du vecteur électrique réfracté (X_2, Y_2, Z_2) ont, en un point (x, y, z) du milieu 2, et à l'instant t, les valeurs suivantes

$$(208)\quad \begin{cases} X_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - a_2\right)\cos\rho, \\ Y_2 = B_2 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - b_2\right), \\ Z_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - a_2\right)\sin\rho, \end{cases}$$

A_2, B_2, a_2, b_2 étant des constantes.

A ces vecteurs électriques correspondent des vecteurs magnétiques. Soient

(L_1, M_1, N_1) le vecteur magnétique incident,
(L'_1, M'_1, N'_1) le vecteur magnétique réfléchi,
(L_2, M_2, N_2) le vecteur magnétique réfracté.

Les équations (83), jointes aux équations (206), donnent

$$(209)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial L_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B_1 \cos i \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - b_1\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial M_1}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial N_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B_1 \sin i \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - b_1\right). \end{cases}$$

Les équations (83), jointes aux équations (207), donnent

$$(210)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial L'_1}{\partial t} = \dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B'_1 \cos i' \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - b'_1\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial M'_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} A'_1(\cos^2 i + \sin^2 i') \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - a'_1\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial N'_1}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_1 T} B'_1 \sin i' \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i' + z\cos i'}{\tau_1 T} - b'_1\right). \end{cases}$$

Enfin, les relations (83), jointes aux équations (208), donnent

$$(211)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_2)\dfrac{\partial L_2}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_2 T} B_2 \cos\rho \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - b_2\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_2)\dfrac{\partial M_2}{\partial t} = \dfrac{2\pi}{\tau_2 T} A_2 \quad \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - a_2\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_2)\dfrac{\partial N_2}{\partial t} = -\dfrac{2\pi}{\tau_2 T} B_2 \sin\rho \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin\rho - z\cos\rho}{\tau_2 T} - b_2\right) \end{cases}$$

L'équation (192 *bis*) exige que l'on ait, pour $z = 0$,

$$(212)\qquad (1+4\pi\varepsilon F_1)\frac{\partial}{\partial t}(Z_1 + Z'_1) - (1+4\pi\varepsilon F_2)\frac{\partial}{\partial t}Z_2 = 0.$$

L'équation (193 *bis*) exige que l'on ait, pour $z = 0$,

$$(213)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(X_1 + X'_1 - X_2) = 0,$$

$$(214)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(Y_1 + Y'_1 - Y_2) = 0.$$

L'équation (200 *bis*) exige que l'on ait, pour $z = 0$,

$$(1 + 4\pi f_1)(N_1 + N'_1) - (1 + 4\pi f_2) N_2 = 0.$$

Cette égalité devant avoir lieu quel que soit t, on en déduit l'égalité

$$(1 + 4\pi f_1)\left(\frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{\partial N'_1}{\partial t}\right) - (1 + 4\pi f_2)\frac{\partial N_2}{\partial t} = 0. \tag{215}$$

L'équation (202 *bis*) exige que l'on ait, pour $z = 0$,

$$L_1 + L'_1 - L_2 = 0,$$
$$M_1 + M'_1 - M_2 = 0.$$

Ces égalités devant avoir lieu quel que soit t, on en déduit les égalités

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} + \frac{\partial L'_1}{\partial t} - \frac{\partial L_2}{\partial t} = 0, \tag{216}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{\partial M'_1}{\partial t} - \frac{\partial M_2}{\partial t} = 0. \tag{217}$$

Les égalités (212) à (217) ne peuvent être vérifiées, quel que soit t, pour $z = 0$, que si l'on a

$$a'_1 = a_2, \tag{218}$$

$$b_1 = b'_1 = b_2, \tag{219}$$

$$\frac{\sin i}{\tau_1} = \frac{\sin i'}{\tau_2} = \frac{\sin \rho}{\tau_2}. \tag{220}$$

Si l'on suppose vérifiées ces égalités (218), (219) et (220), les égalités (206), (207), (208) et (212) donnent

$$(1 + 4\pi\varepsilon F_1) A'_1 \sin i + (1 + 4\pi\varepsilon F_2) A_2 \sin \rho = 0. \tag{221}$$

Les égalités (206), (207), (208) et (213) donnent

$$A'_1 \cos i - A_2 \cos \rho = 0. \tag{222}$$

Les égalités (209), (210), (211) et (217) donnent

$$\frac{A'_1}{\tau_1(1 + 4\pi f_1)}(\cos^2 i + \sin^2 i) + \frac{A_2}{\tau_2(1 + 4\pi f_2)} = 0. \tag{223}$$

Les égalités (206), (207), (208) et (214) donnent

$$B_1 + B'_1 - B_2 = 0. \tag{224}$$

Les égalités (209), (210), (211), (215) et (220) redonnent la même égalité. Enfin les égalités (209), (210), (211) et (216) donnent

$$\frac{B_1 - B'_1}{\tau_1(1 + 4\pi f_1)} \cos i - \frac{B_2}{\tau_2(1 + 4\pi f_2)} \cos \rho = 0. \tag{225}$$

Les égalités (221) et (222) exigent que l'on ait

$$A'_1 = 0, \qquad A_2 = 0. \tag{226}$$

En effet, pour qu'il en soit autrement, il faudrait que l'on ait

$$(1 + 4\pi\varepsilon F_1) \sin i \cos \rho + (1 + 4\pi\varepsilon F_2) \sin \rho \cos i = 0$$

ou

$$\frac{\tang i}{\tang \rho} = -\frac{(1 + 4\pi\varepsilon F_2)}{(1 + 4\pi\varepsilon F_1)},$$

égalité évidemment incompatible avec les égalités (220).

D'ailleurs, l'égalité (223) résulte des égalités (226).

Quant aux égalités (224) et (225), elles donnent

$$\tag{227} \left\{ \begin{aligned} B'_1 &= B_1 \frac{\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i - \tau_1(1 + 4\pi f_1) \cos \rho}{\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i + \tau_1(1 + 4\pi f_1) \cos \rho}, \\ B_2 &= B_1 \frac{2\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i}{\tau_2(1 + 4\pi f_2) \cos i + \tau_1(1 + 4\pi f_1) \cos \rho}. \end{aligned} \right.$$

Le problème que nous avions posé admet donc une solution acceptable. Cette solution est donnée par les égalités (218), (219), (220), (226) et (227).

En vertu des égalités (220), les égalités (227) peuvent s'écrire

$$\tag{227 bis} \left\{ \begin{aligned} B'_1 &= B_1 \frac{(1 + 4\pi f_2) \sin \rho \cos i - (1 + 4\pi f_1) \sin i \cos \rho}{(1 + 4\pi f_2) \sin \rho \cos i + (1 + 4\pi f_1) \sin i \cos \rho}, \\ B_2 &= B_1 \frac{2(1 + 4\pi f_2) \sin \rho \cos i}{(1 + 4\pi f_2) \sin \rho \cos i + (1 + 4\pi f_1) \sin i \cos \rho}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas particulier où $f_1 = f_2 = 0$, cas qui est réalisé sensiblement

par la plupart des milieux diélectriques, les égalités (227 *bis*) deviennent

$$(228)\qquad \begin{cases} B'_1 = -B_1 \dfrac{\sin(i-\rho)}{\sin(i+\rho)}, \\ B_2 = B_1 \dfrac{2\cos i \sin\rho}{\sin(i+\rho)}. \end{cases}$$

Les formules qui résolvent le problème posé ont alors exactement la même forme analytique que les formules proposées par Fresnel pour traiter la réflexion et la réfraction, à la surface de séparation de deux milieux transparents, d'un rayon lumineux polarisé dans le plan d'incidence.

II. — *Le vecteur électrique est à l'intersection de l'onde et du plan d'incidence.*

Gardons les notations du paragraphe précédent.

Nous aurons

$$(229)\qquad \begin{cases} X_1 = A_1 \cos i \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - a_1\right), \\ Y_1 = 0, \\ Z_1 = A_1 \sin i \sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - a_1\right). \end{cases}$$

X'_1, Y'_1, Z'_1 sont encore donnés par les égalités (207) et X_2, Y_2, Z_2 par les égalités (208).

Les égalités (209) sont remplacées par les égalités

$$(230)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial L_1}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial M_1}{\partial t} = \dfrac{2\pi A_1}{\tau_1 T}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x\sin i - z\cos i}{\tau_1 T} - a_1\right), \\ \dfrac{\mathfrak{C}}{\sqrt{2}}(1+4\pi f_1)\dfrac{\partial N_1}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

tandis que les égalités (210) et (211) sont conservées.

Les égalités (212) à (217) doivent encore avoir lieu, pour $z = 0$, quel que soit t.

On en conclut, en premier lieu, que l'on doit avoir

(231) $$a_1 = a'_1 = a_2,$$

(232) $$b'_1 = b_2,$$

(233) $$\frac{\sin i}{\tau_1} = \frac{\sin i'}{\tau_1} = \frac{\sin \rho}{\tau_2}.$$

Ces égalités vérifiées, les égalités (229), (207), (208) et (212) donnent

(234) $$(1 + 4\pi\varepsilon F_1)(A_1 - A'_1)\sin i - (1 + 4\pi\varepsilon F_2)A_2 \sin\rho = 0.$$

Les égalités (229), (207), (208) et (213) donnent

(235) $$(A_1 + A'_1)\cos i - A_2 \cos\rho = 0.$$

Les égalités (230), (210), (211) et (217) donnent

(236) $$\frac{A_1 + A'_1}{\tau_1(1 + 4\pi f_1)} - \frac{A_2}{\tau_2(1 + 4\pi f_2)} = 0.$$

Les égalités (229), (207), (208) et (214) donnent

(237) $$B'_1 - B_2 = 0.$$

Les égalités (230), (210), (211), (215) et (223) redonnent la même égalité.

Enfin les égalités (230), (210), (211) et (216) donnent

(238) $$\frac{B'_1}{\tau_1(1 + 4\pi f_1)}\cos i + \frac{B_2}{\tau_2(1 + 4\pi f_2)}\cos\rho = 0.$$

Les égalités (237) et (238) donnent

(239) $$B'_1 = 0, \qquad B_2 = 0,$$

car, pour qu'il en soit autrement, il faudrait que l'on eût

$$\tau_1(1 + 4\pi f_1)\cos\rho + \tau_2(1 + 4\pi f_2)\cos i = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (233)

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang}\rho} = -\frac{1 + 4\pi f_2}{1 + 4\pi f_1},$$

égalité incompatible, en général, avec les égalités (233).

Il resterait à vérifier les égalités (234), (235), (236) par des valeurs convenablement choisies de A_1 et de A_2. Mais il est aisé de voir qu'il est impossible d'y parvenir. En effet, les égalités (235) et (236) exigent que l'on ait

(240) $$A_1 - A'_1 = 0, \qquad A_2 = 0,$$

à moins que l'on n'ait

$$\tau_1(1 - 4\pi f_1)\cos\rho - \tau_2(1 - 4\pi f_2)\cos i = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (233),

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} \rho} = \frac{1 - 4\pi f_2}{1 - 4\pi f_1},$$

égalité incompatible, en général, avec les égalités (233).

Les égalités (240), jointes à l'égalité (234), donneraient l'égalité

$$A_1 = 0,$$

qui est inadmissible, puisque A_1 est arbitraire.

Ainsi, *lorsque le vecteur électrique incident est dans le plan d'incidence, on ne peut supposer sans contradiction que la perturbation réfléchie et la perturbation réfractée soient composées chacune d'une seule onde plane propageant un vecteur électrique situé dans l'onde.*

Cette conséquence paraît condamner toute théorie électromagnétique de la lumière.

NOTE ADDITIONNELLE.

D'après H. von Helmholtz, un diélectrique, dont la polarisation $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ varie, exerce les mêmes actions électrodynamiques qu'un conducteur traversé par un flux dont les composantes sont

$$u = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}.$$

La théorie de Helmholtz ne pouvant s'accorder pleinement avec l'expérience, nous avons proposé (¹) de remplacer les égalités précédentes par les égalités

$$u = \Theta \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \qquad v = \Theta \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \qquad w = \Theta \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t},$$

où $\Theta = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ est une constante. Dans le précédent Mémoire et dans un certain nombre d'autres publications (²), nous avons développé les conséquences de cette hypothèse; ces conséquences évitent certaines des objections que l'on peut adresser à la théorie de Helmholtz; toutefois, elles ne s'accordent pas avec une loi qui paraît aujourd'hui bien vérifiée par les expériences de M. Blondlot et de MM. Cohn et Zeemann : *La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques transversales dans un diélectrique est en raison inverse de la racine carrée du pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.*

Pour éviter ce désaccord, nous généraliserons l'hypothèse précédente, en supposant que Θ est non plus une constante, mais une fonction de la polarisation $\mathcal{M}$ et de l'état de la substance au point considéré; toutefois, pour simplifier, nous traiterons seulement le cas où Θ est indépendant de $\mathcal{M}$

(¹) *Comptes rendus du troisième Congrès scientifique international des Catholiques*, séance du 5 septembre 1894.

(²) *Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5ᵉ série, t. I). — *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'éclairage électrique*, t. IV, p. 494; 1895).

et se réduit à une fonction H de l'état de la matière. Nous remplacerons les équations (3) par

$$\varphi = \mathrm{H}\,\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \qquad \psi = \mathrm{H}\,\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \qquad \chi = \mathrm{H}\,\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t},$$

et nous supposerons qu'un diélectrique, dont la polarisation varie, exerce et subit les mêmes actions électrodynamiques qu'un conducteur traversé par un flux u, v, w, dont les composantes auraient pour valeur

$$u = \varphi, \qquad v = \psi, \qquad w = \chi.$$

Cette hypothèse ne modifie point la marche du Mémoire précédent; dans la plupart des équations qui y figurent, il suffit de remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$; il en est cependant qui subissent une modification plus profonde, que nous allons indiquer.

Équations (19) et (20). — Remplacer la fonction $\mathfrak{V}$ par la fonction

$$\omega = \int \mathrm{H}\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\varpi,$$

Équation (53). — Remplacer $\mathfrak{C}\mathfrak{V}$ par $\mathfrak{A}\omega$.

Équations (73). — Remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$H.

Équations (74). — Remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$H et multiplier tous les seconds membres par H.

Équations (77). — Même modification.

Équation (101). — Écrire le second membre

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\,\varphi + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\,\psi + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\,\chi\right) d\varpi.$$

Équation (133). — Écrire le second membre

$$-\varepsilon\int_2\left[\frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial x}\,\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial y}\,\frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{V}'+\mathfrak{V}')}{\partial z}\,\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial t}\right] d\varpi_2$$
$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int_2\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\,\varphi_2 + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\,\psi_2 + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\,\chi_2\right) d\varpi_2.$$

Équation (134). — Modification analogue.

Équation (136). — Au deuxième terme du second membre, remplacer

respectivement φ, ψ, χ par $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}$; dans les autres termes, remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$.

Équations (137) à (138). — Mêmes modifications.

Équations (144) et (146). — Remplacer, au premier membre, $\mathfrak{V}$ par ω; au second membre, F par HF, $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$H.

Équations (147), (149), (152), (159), (160), (163), (164), (166), (167), (168), (182), (183). — Remplacer $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{A}$H.

Équation (162). — Multiplier le second membre par H.

L'équation (168) modifiée nous donne, pour vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique,

$$\text{(I)} \qquad \tau = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}} \frac{1}{H\sqrt{4\pi\varepsilon F(1+4\pi f)}}.$$

Dans l'éther, on a, d'après les expériences de Hertz, $\tau_0 = v$, v étant le coefficient de passage du système d'unités électrostatiques au système d'unités électromagnétiques; on a, d'ailleurs,

$$v = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}} \frac{1}{\sqrt{(1+4\pi f_0)(1+4\pi\varepsilon F_0)}}.$$

On a donc

$$\text{(II)} \qquad H_0 = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F_0}{4\pi\varepsilon F_0}}.$$

D'après les expériences de M. Blondlot, de MM. Cohn et Zeemann, 1 et 2 étant deux diélectriques quelconques non magnétiques, on a

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F_1}{1+4\pi\varepsilon F_2}}.$$

D'où

$$\text{(III)} \qquad \frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F_2}{1+4\pi\varepsilon F_1} \frac{4\pi\varepsilon F_1}{4\pi\varepsilon F_2}}.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (II), montre que l'on a, pour tout diélectrique,

$$\text{(IV)} \qquad H = \sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon F}{4\pi\varepsilon F}}.$$

L'équation (160)

$$\mathfrak{C} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\mathfrak{A}H} \frac{\sqrt{1+4\pi\varepsilon F}}{\sqrt{4\pi\varepsilon F\lambda}}$$

Equation (193) ... au premier ...

et au second membre

$$+ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} H_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathfrak{X}_2 \cos(T, x) + \ldots].$$

L'équation (193 *bis*) devient

$$\text{(VII)} \qquad \left(\frac{\partial X_1}{\partial t} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} H_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_1}{\partial t^2}\right) \cos(T, x) + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial X_2}{\partial t} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} H_2 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_2}{\partial t^2}\right) \cos(T, x) + \ldots.$$

Ces égalités ne portent plus, comme les égalités (192 *bis*) et (193 *bis*), sur les seules quantités X, Y, Z; elles ne permettent plus de traiter simplement le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes planes à la surface de séparation de deux diélectriques.

SUR LA

RECHERCHE DES ÉQUATIONS FINIES

D'UN GROUPE CONTINU FINI DE TRANSFORMATIONS,

ET SUR LES ÉQUATIONS DE LIE,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Ce Travail est destiné à compléter, sur certains points, celui que nous avons publié précédemment *sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales* (1), ou, ce qui revient au même, sur les équations aux dérivées partielles que nous proposions de nommer *équations de Lie*. Ce sont les équations de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) X_k f = 0, \tag{1}$$

où les r transformations infinitésimales indépendantes

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{2}$$

définissent un groupe. Nous avons donné, dans ce Mémoire, une théorie complète de l'intégration de ces *équations de Lie*, mais avec l'hypothèse que l'on connaisse les équations finies du groupe (2), sous une forme quelconque. L'un des résultats en était que, sous cette hypothèse, l'intégration de telles équations peut toujours se ramener à celle d'équations

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII.

différentielles ordinaires linéaires ; et, ce qui augmente l'importance de ce résultat, c'est que, comme nous le montrions alors, le *problème normal*, auquel M. Lie ramène toutes les questions d'intégration où intervient la théorie des groupes continus finis, peut se réduire lui-même à l'intégration d'une *équation de Lie* (1), pour laquelle on connaît les équations finies du groupe correspondant (2) [1].

Nous reprenons aujourd'hui le problème préliminaire, réservé alors, de la *détermination des équations finies d'un groupe continu fini de transformations dont on connaît les transformations infinitésimales* (2) ; et nous donnons, pour le résoudre, plusieurs méthodes, toutes fondées sur la théorie de l'intégration des systèmes complets exposée par M. Lie au t. XXV des *Mathematische Annalen*. La dernière (§ IV) ne suppose connues, en outre, que les propositions les plus élémentaires de la théorie des groupes ; elle est, de plus, comme nous l'indiquons rapidement pour terminer, susceptible de s'étendre à l'intégration d'une *équation de Lie* (1), dans le cas le plus général. Nous avons cru intéressant néanmoins d'exposer les autres, parce qu'elles sont plus naturelles et qu'elles fournissent incidemment, de la manière la plus simple, tous les résultats donnés par M. Lie sur la recherche des groupes transitifs de structure donnée : il est également digne de remarque que les notions de groupe asystatique, de groupes simplement transitifs réciproques, et même de groupe adjoint s'y introduisent nécessairement et d'elles-mêmes.

Les résultats particuliers donnés par M. Lie sur le problème que nous traitons se présentent ici naturellement et sont obtenus par une voie uniforme. Nous établissons, de plus, ce fait général que, pour les groupes transitifs (§ II), la recherche de leurs équations finies dépend encore uniquement d'éliminations, de quadratures et de l'intégration d'équations différentielles linéaires ordinaires. Notre méthode, combinée avec celle du Mémoire que nous rappelions en commençant, permettra, du reste, d'examiner (théoriquement du moins) les simplifications qui pourraient se présenter pour certains groupes particuliers, parmi tous les groupes qui leur sont semblables.

---

(1) Dans l'application des théories d'intégration de M. Lie, on peut avoir à déterminer d'abord les transformations infinitésimales du groupe intervenant dans la question ; mais ces transformations infinitésimales sont données par leurs équations de définition, qui s'intègrent elles-mêmes par des équations linéaires différentielles ordinaires.

Pour les groupes intransitifs, on est, *en général*, obligé (§ III) de mettre à part le problème préliminaire de la détermination de leurs invariants. L'étude complète de ce problème nécessiterait une théorie approfondie de l'intégration des systèmes complets, dans le cas le plus général : c'est une question difficile, sur laquelle nous espérons pouvoir revenir dans une autre occasion. Si l'on suppose ces invariants déterminés, on n'est pas dans un cas essentiellement distinct de celui des groupes transitifs. Nous donnons, néanmoins, une méthode directe et générale pour traiter ce cas, et qui peut révéler certaines simplifications importantes.

Nous avons enfin jugé utile, pour faciliter la lecture de notre travail, de rappeler, dans un premier paragraphe, les résultats de la théorie des groupes qui nous servent plus particulièrement, et qui se trouvent, souvent disséminés, dans le grand Ouvrage de MM. Lie et Engel ([1]).

I. — Les groupes paramétriques canoniques.

1. Le fait qu'un système d'équations

(1) $$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définit un groupe continu fini de transformations des x en x', aux paramètres a, se traduit par les identités (écrites sous forme abrégée)

(2) $$f_i(f(x|a)|b) = f_i(x|c) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les nouvelles valeurs c des paramètres sont données par des équations

(3) $$c_k = \varphi_k(a_1 \ldots a_r | b_1 \ldots b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

que nous appelons, comme il paraît naturel, les *équations paramétriques du groupe* (1). On sait que ces équations définissent elles-mêmes deux nouveaux groupes qui se trouvent ainsi associés au groupe (1). Le premier s'obtient en considérant les équations (3) comme représentant une transformation des variables a en les variables c, les b étant des paramètres : nous l'appelons le *premier groupe paramétrique du groupe* (1). Si, de même, on considère, dans les équations (3), les b comme des variables,

([1]) Les principaux résultats de notre Travail ont été annoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (14 janvier 1895).

les c comme des variables transformées, les a comme des paramètres, on obtient le *second groupe paramétrique* [1] *du groupe* (1). Ces deux groupes sont *holoédriquement isomorphes* au groupe (1), et chaque transformation de l'un est *échangeable* avec chaque transformation de l'autre; en d'autres termes, ce sont *deux groupes simplement transitifs réciproques*.

Les transformations infinitésimales de ces deux groupes s'obtiennent comme il suit. Les seconds membres des équations (1) satisfont à des équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a)\,\xi_{ji}(f) \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, r),$$

que l'on peut écrire aussi

$$\xi_{ji}(f) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \tag{4'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, r).$$

Le groupe (1) est alors engendré par les transformations infinitésimales

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r); \tag{5}$$

et le premier groupe paramétrique par les transformations infinitésimales

$$A_j f = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{6}$$

On arrive de même au second groupe paramétrique en partant des équations (1) résolues par rapport aux x :

$$x_i = F_i(x'_1 \ldots x'_n \mid a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

On a alors des identités

$$\xi_{ji}(F) = \sum_{k=1}^{r} \beta_{jk}(a) \frac{\partial F_i}{\partial a_k} \tag{8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, r).$$

---

(1) Nous avons employé précédemment l'expression de *groupes des paramètres (premier et second)*, *Parametergruppen* de M. Lie.

et le second groupe paramétrique est engendré par les transformations infinitésimales

$$\text{(9)} \qquad B_j f = \sum_{k=1}^{r} \beta_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

On a enfin, simultanément, des identités

$$\text{(10)} \qquad (X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s, \qquad (A_i A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} A_s, \qquad (B_i B_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} B_s,$$

$$\text{(11)} \qquad (A_i B_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

où les c_{iks} sont des constantes qui définissent la *structure* du groupe (1).

Inversement, si l'on connaît, en même temps que les transformations infinitésimales (5) du groupe (1), celles de l'un de ses deux groupes paramétriques, on remonte aux *équations finies* (1), en intégrant un système complet. En effet, les fonctions F_i, où l'on suppose les lettres x mises à la place des x', sont les intégrales du système complet

$$\text{(12)} \qquad X_j f + A_j f = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

qui se réduisent respectivement à x_i, quand on donne aux a les valeurs qui correspondent à la transformation identique, valeurs qu'on peut se donner arbitrairement, car cela revient à augmenter, dans les équations (1), les paramètres a de quantités constantes. Et les fonctions f_i se déterminent, d'une manière toute semblable, au moyen du système complet

$$\text{(13)} \qquad X_j f + B_j f = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Les équations paramétriques (3) s'obtiendraient d'une manière analogue, en vertu de cette remarque que chacun des deux groupes paramétriques est à lui-même son premier groupe paramétrique, et admet l'autre comme son second groupe paramétrique.

2. Un même groupe de transformations peut être représenté par une infinité de systèmes différents d'équations, tels que le système (1). On les déduit tous de l'un d'entre eux, le système (1) par exemple, en y effectuant, sur les paramètres a, tous les changements possibles de variables. A chacun de ces modes de représentation du groupe G considéré correspond un

couple de groupes paramétriques, respectivement *semblables* aux groupes (6) et (9); mais le groupe G est toujours défini par les mêmes transformations infinitésimales (5).

On sait qu'inversement, si l'on connaît ces transformations infinitésimales (5), ainsi que les transformations infinitésimales (6) d'un groupe simplement transitif, de la même structure $c_{ik s}$ que le groupe (5), les équations qu'on en déduit, en opérant comme il a été dit à la fin du paragraphe précédent, constituent l'un des systèmes d'équations finies du groupe (5); et le groupe (6) est alors précisément le premier groupe paramétrique du proposé.

Parmi tous ces modes de représentation du groupe (5), il en est un particulièrement important, fourni par les *équations canoniques* de ce groupe. On y est conduit en cherchant tous les groupes à un paramètre qui y sont contenus : ils s'obtiennent en intégrant le système d'équations différentielles ordinaires

$$(14) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les λ sont des constantes arbitraires, avec les conditions initiales $x'_i = x_i$ pour $t = 0$. Les intégrales ne dépendent de t et des λ que par les combinaisons $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$, de sorte qu'il suffit d'y remplacer $\lambda_j t$ par e_j, pour obtenir un système d'équations finies du groupe, les e y étant les paramètres. Ce sont précisément les *équations canoniques du groupe*, que l'on peut écrire, sous forme de séries,

$$(15) \qquad x'_i = x_i + \frac{1}{1}\mathrm{X}x_i + \frac{1}{1.2}\mathrm{XX}x_i + \frac{1}{1.2.3}\mathrm{XXX}x_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec

$$\mathrm{X}f = \sum_{j=1}^{r} e_j \mathrm{X}_j f.$$

Ces équations canoniques ont cette propriété remarquable qu'il suffit d'y faire varier les paramètres proportionnellement pour obtenir un sous-groupe quelconque, à un paramètre, du groupe considéré. Les deux groupes paramétriques correspondants sont dits les *groupes paramétriques canoniques du groupe* (5).

L'intégration du système (14) est, du reste, équivalente, avec un chan-

gement de notations, à celle de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j f = 0. \tag{16}$$

Remarquons enfin que, comme les transformations infinitésimales (5) peuvent être remplacées par r combinaisons linéaires à coefficients constants des $X_k f$ (linéairement indépendantes), il y a une infinité de systèmes d'équations canoniques pour un groupe, se déduisant les unes des autres par des transformations linéaires et homogènes opérées sur les paramètres; de même pour les couples de groupes paramétriques canoniques.

3. Les transformations infinitésimales des deux groupes paramétriques canoniques du groupe (5) peuvent être considérées comme connues, dès qu'on connaît les constantes c_{iks} qui définissent la structure de ce groupe. Le calcul n'exige que la résolution d'une équation algébrique (¹) : voici comment on peut le diriger, pour le premier groupe paramétrique, par exemple :

Tout revient à la détermination des fonctions ψ_{jk}, qui figurent dans les équations (4). Or, si l'on prend comme inconnues les fonctions de t

$$\Psi_{jk}(t) = t\psi_{jk}(\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t),$$

on trouve qu'elles sont déterminées par les équations linéaires à coefficients constants

$$\frac{d\Psi_{jk}}{dt} = \varepsilon_{jk} + \sum_{h=1}^{r}\sum_{s=1}^{r} \lambda_h c_{shj} \Psi_{sk}, \qquad e_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = k \\ 0 \text{ pour } j \neq k \end{cases},$$

avec les conditions initiales $\Psi_{jk} = 0$, pour $t = 0$. Ce qui établit le résultat annoncé. Quant au second groupe paramétrique, il se déduit du premier en changeant, dans les expressions de ses transformations infinitésimales, $e_1, e_2, \ldots, e_r$ respectivement en $-e_1, -e_2, \ldots, -e_r$; cela tient à ce que, sous la forme canonique (15), deux transformations inverses du groupe correspondent à des valeurs des paramètres canoniques $e_1, \ldots, e_r$ égales et de signes contraires.

(¹) Ce résultat est dû à M. Lie, le mode de calcul indiqué à M. Engel (*voir*, par exemple, S. Lie et Engel, *Theorie der Transf.-gruppen*, t. III, p. 792 et suiv.).

Des formules précédentes, on déduit encore que les transformations infinitésimales $A_1 f, \ldots, A_r f$ du premier groupe paramétrique canonique vérifient l'identité

$$\sum_{i=1}^{r} e_i A_i f = \sum_{i=1}^{r} e_i \frac{\partial f}{\partial e_i}.$$

Cette identité permet de rattacher l'un à l'autre les deux modes de calcul des équations finies du groupe (G), précédemment donnés. Si l'on applique, en effet, au système (12) la méthode de M. Mayer, en supposant que le groupe $A_1 f, \ldots, A_r f$ est le premier groupe paramétrique canonique, on devra poser $e_1 = \lambda_1 t, \ldots, e_r = \lambda_r t$ et, en vertu de l'identité précédente, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i f,$$

de sorte que l'intégration du système complet (12) se ramènera précisément à celle de la seule équation (15).

4. Si le groupe considéré (G) ne contient pas de transformation infinitésimale distinguée, on peut même obtenir sans intégration les équations canoniques finies des deux groupes paramétriques canoniques. Dans ce cas, elles sont, en effet, les mêmes pour ce groupe et pour son *groupe adjoint* (1), qui lui est alors holoédriquement isomorphe. Or, les transformations infinitésimales de ce groupe adjoint sont, comme l'on sait,

$$E_j f = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

et la détermination de ses équations canoniques finies (d'où l'on déduira immédiatement ses équations paramétriques) dépend de l'intégration d'un système d'équations linéaires à coefficients constants.

Mais, si le groupe considéré contient une ou plusieurs transformations infinitésimales distinguées, la détermination des équations finies de ses groupes paramétriques canoniques nécessite certaines quadratures. C'est ce qui résultera, du reste, des développements qui suivent.

---

(1) Pour ce qui concerne le groupe adjoint, son origine et ses propriétés, nous sommes obligé, afin de ne pas allonger outre mesure ces préliminaires, de renvoyer à l'Ouvrage de M. Lie (*Theorie der Transf.-gruppen*, t. I, Chap. XVI et t. III, Chap. XXVIII).

II. — Détermination des équations finies d'un groupe transitif.

5. *On suppose connues les transformations infinitésimales d'un groupe*

$$(1)\qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r);$$

et l'on se propose de trouver, sous une forme quelconque, les équations finies de ce groupe.

En vertu de ce qui précède, on peut considérer comme connues les transformations infinitésimales de ses deux groupes paramétriques canoniques, ou, si l'on veut (par un changement de variables arbitraire), plus généralement celles de deux groupes simplement transitifs réciproques, isomorphes au groupe (1). Soient

$$(2)\qquad A_k f = \sum_{h=1}^{r} \alpha_{kh}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(3)\qquad B_k f = \sum_{h=1}^{r} \beta_{kh}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

ces deux groupes, et l'on peut supposer que l'on a les identités

$$(X_j X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{jks} X_s, \qquad (A_j A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{jks} A_s, \qquad (B_j B_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{jks} B_s,$$

$$(A_j B_k) = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Tout revient dès lors à intégrer le système complet

$$(4)\qquad X_k f + A_k f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

connaissant les transformations infinitésimales (3) qui laissent ce système complet invariant.

Si l'on connaît en effet n intégrales indépendantes de ce système complet :

$$\Phi_i(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations finies cherchées s'obtiendront en résolvant le système

$$\Phi_i(x'_1 \ldots x'_n \mid a_1 \ldots a_r) = \Phi_i(x_1 \ldots x_n \mid a_1^0 \ldots a_r^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous sommes donc naturellement conduits à appliquer ici la théorie de l'intégration des systèmes complets admettant des transformations infinitésimales connues, due à M. Lie, avec les perfectionnements que nous y avons apportés.

Si nous supposons d'abord que le groupe (1) est simplement transitif, c'est-à-dire que $n = r$, et que le déterminant des ξ_{ki} n'est pas identiquement nul, nous nous trouvons en présence de ce que M. Lie appelle le *problème normal* de sa théorie, et qui peut s'énoncer ainsi :

On donne un système complet à $\nu = \mu + \rho$ *variables et* μ *équations*

$$(5)\qquad \mathrm{L}_j f = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{ji}(y_1 \ldots y_\nu) \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu)$$

et un groupe de ρ *transformations infinitésimales indépendantes*

$$(6)\qquad \mathrm{Y}_l f = \sum_{i=1}^{\nu} \eta_{li}(y_1 \ldots y_\nu) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (l = 1, 2, \ldots, \rho),$$

satisfaisant aux identités $(\mathrm{L}_j, \mathrm{Y}_l) = 0$ *pour toutes les valeurs des indices; on suppose de plus que le déterminant des coefficients des* L_j *et* Y_l *n'est pas nul : intégrer ce système complet.*

Ce problème se ramène soit à l'intégration d'une seule équation de Lie, soit à l'intégration successive d'une suite d'équations de Lie simples; ou encore, si l'on préfère, à l'intégration d'équations linéaires auxiliaires et à des quadratures ([1]).

Ces résultats trouvent ici leur application immédiate : si nous voulons par exemple effectuer la réduction à des systèmes linéaires, nous introduirons le groupe linéaire adjoint au groupe (3), soit

$$\mathrm{E}_j f = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

et écrirons les équations

$$\mathrm{X}_k f + \mathrm{A}_k f = 0, \qquad \mathrm{B}_h f + \mathrm{E}_h f = 0 \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, r).$$

([1]) Ces résultats sont contenus, explicitement ou implicitement, dans notre Mémoire : *Sur les systèmes d'équations différentielles*, etc. (*Ann. de la Fac. de Toulouse*, t. VIII), ou s'établissent par des raisonnements analogues à ceux qui y sont employés.

Elles forment un système complet; pour l'intégrer, on posera $x_i = \xi_i t$, $a_k = \alpha_k t$, et l'on sera ramené à une équation de Lie, linéaire, de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) E_k f = 0.$$

L'intégration de cette équation résoudra complètement le problème, si le groupe (1) n'a pas de transformations infinitésimales distinguées. Sinon, il faudra en outre effectuer autant de quadratures indépendantes qu'il y a de ces transformations distinguées dans le groupe (1).

6. Passons maintenant au cas où le groupe (1) est un groupe transitif quelconque.

Nous pouvons résoudre n des équations (4) par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, par exemple les n premières, et porter dans les autres. Le système (4) prend ainsi la forme

(7) $$M_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}(x) A_j f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(8) $$\mathcal{A}_h f = A_{n+h} f + \sum_{j=1}^{n} \nu_{hj}(x) A_j f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s;\ r = n + s);$$

et, comme cette transformation du système revient à faire des combinaisons linéaires dont les coefficients sont fonctions des x seuls, on a les identités

(9) $$(M_i, B_k) = 0, \qquad (\mathcal{A}_h, B_k) = 0.$$

Et puisque les équations (7), (8) forment toujours un système complet, on a

(10) $$(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}_l) = \text{combinaison linéaire des } \mathcal{A};$$

d'autre part, par un calcul direct, on voit que ces mêmes crochets sont des combinaisons linéaires de $A_1 \ldots A_n$, $\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_s$, dont les coefficients ne dépendent que des x. Mais comme il n'y a pas de relation linéaire et homogène entre ces dernières transformations infinitésimales, on en conclut que les x figurent seuls dans les coefficients des seconds membres des relations (10),

c'est-à-dire qu'on peut les écrire

$$(11) \qquad (\mathcal{A}_h, \mathcal{A}_l) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{hlm}(x)\mathcal{A}_m \qquad (h, l = 1, 2, \ldots, s),$$

c'est-à-dire que, pour chaque système de valeurs des x, les transformations (8) définissent un groupe.

Nous pouvons maintenant, des équations (8), tirer les valeurs de s dérivées, par exemple $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_s}$. Portons ces valeurs dans les B_k, en écrivant, pour plus de netteté, $b_1 \ldots b_n$ à la place de $a_{s+1} \ldots a_r$: on obtient les nouvelles transformations (où la lettre a désigne le système des variables $a_1 \ldots a_s$)

$$(12) \qquad \mathfrak{B}_k f = B_k f - \sum_{h=1}^{s} \sigma_{kh}(x \mid a \mid b)\mathcal{A}_h f = \sum_{l=1}^{n} \overline{\beta_{kl}}(x \mid a \mid b)\frac{\partial f}{\partial b_l}.$$

Calculant les crochets de Jacobi, il vient

$$(\mathfrak{B}_h, \mathfrak{B}_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{hkl}\mathfrak{B}_l + \text{comb. lin. des } \mathcal{A};$$

or, le résultat ne doit contenir aucune des dérivées $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_s}$, et il n'existe pas de combinaison linéaire des $\mathcal{A}$ qui n'en contienne aucune. On a donc simplement

$$(13) \qquad (\mathfrak{B}_h, \mathfrak{B}_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{hkl}\mathfrak{B}_l \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Les transformations (12), si l'on y considère les x et les a comme des constantes, définissent donc un groupe, isomorphe au groupe (1). Mais il y a plus, ce groupe est *semblable* au groupe (1). Faisons-y en effet le changement de variables

$$z_i = F_i(x_1, \ldots, x_n \; a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les F_i sont les mêmes fonctions que dans les équations (7) du § I. Ces fonctions étant intégrales des équations (4), et, par suite, des équations (8), il vient

$$\mathfrak{B}_k z_i = B_k z_i = \xi_{ki}(z_1, \ldots, z_n),$$

en tenant compte des relations fondamentales [(8), § I]. Le groupe (12) devient donc le groupe (1), où l'on a mis les z à la place des x.

Remarquons en passant que la remarque essentielle qui précède fournit une *méthode pour déterminer, sans intégrations, les divers types de groupes transitifs d'une structure donnée*. Il suffira, en effet, de prendre pour le groupe des $\mathcal{A}_h$ les divers types de sous-groupes du premier groupe paramétrique, et d'en déduire les divers groupes (12) correspondants, au moyen du second groupe paramétrique. (Les x ne jouent, en effet, dans le calcul précédent, aucun rôle, et peuvent être remplacés par des constantes quelconques) [1].

7. Revenons à notre problème qui est actuellement le suivant [les équations (8) étant résolues comme il a été dit, et les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_s}$ portées aussi dans les équations (7)] : *Intégrer le système complet*

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(x \mid a \mid b) \dfrac{\partial f}{\partial b_j} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_h} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varpi_{hj}(x \mid a \mid b) \dfrac{\partial f}{\partial b_j} = 0 & (h = 1, 2, \ldots, s), \end{cases}$$

connaissant le groupe de transformations infinitésimales (12) *que ce système admet.*

Parmi ces transformations $\mathcal{B}_h$, on en peut trouver n dont le déterminant ne soit pas nul, les n premières par exemple, et l'on a alors

$$\mathcal{B}_{n+h} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{hj}(x \mid a \mid b) \mathcal{B}_j \qquad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Les fonctions φ_{hj} sont, comme l'on sait, des intégrales du système (14), et il en résulte qu'il y en a autant d'indépendantes comme fonctions des x des a et des b, que comme fonctions des b seuls. Deux cas peuvent alors se présenter :

1° Parmi ces fonctions φ_{hj}, il y en a n d'indépendantes. Le problème est

---

[1] Cette méthode ne diffère du reste que par le mode d'exposition de celle qui a été indiquée par M. Lie (voir *Theorie der Transf.-gr.*, t. III, p. 798 et suiv.).

résolu dans ce cas sans aucune intégration. Dans ce cas le groupe (12), et par suite le groupe (1), auquel il est semblable, est *asystatique*, pour employer une expression de M. Lie. Nous retrouvons donc ce théorème de M. Lie [1] : *Les équations finies d'un groupe asystatique s'obtiennent sans intégrations, dès qu'on en connaît les transformations infinitésimales.*

2° Passons au cas général. Parmi les fonctions φ_{kj}, il y en a seulement $n-p=q$, qui soient indépendantes. Prenons-les comme nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots, u_q$ à la place de q des b, par exemple $b_{p+1}, \ldots, b_n$. Le système (14) se réduit à

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}\bar{\omega}_{ij}(x\,|\,a\,|\,u\,|\,b)\frac{\partial f}{\partial b_j}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n),\\ &\frac{\partial f}{\partial a_h}+\sum_{j=1}^{p}\bar{\varpi}_{ij}(x\,|\,a\,|\,u\,|\,b)\frac{\partial f}{\partial b_j}=0 \qquad (h=1,2,\ldots,s),\end{aligned}\right.$$

et les transformations (12) prennent la forme

$$(16)\quad \mathrm{B}_k f=\mathrm{U}_k f+\mathfrak{B}'_k f \qquad (k=1,2,\ldots,r),$$

$$\mathrm{U}_k f=\sum_{i=1}^{q}\upsilon_{ki}(u)\frac{\partial f}{\partial u_i},\qquad \mathfrak{B}'_k f=\sum_{j=1}^{p}\beta'_{kj}(x\,|\,a\,|\,u\,|\,b)\frac{\partial f}{\partial b_j}.$$

Remarquons en passant que les transformations U_k définissent un groupe, isomorphe au groupe proposé. D'où cette conséquence qu'*un groupe transitif simple, de structure donnée, avec le nombre minimum de variables, est nécessairement asystatique.*

Reprenant les transformations (16), ou plutôt les n premières d'entre elles, nous en pouvons déduire exactement p combinaisons linéaires de la forme

$$(17)\quad \sum_{k=1}^{n}\upsilon_k(u)\,\mathfrak{B}_k f,$$

qui ne contiennent aucune des dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_q}$, et ne soient liées par aucune relation linéaire et homogène dont les coefficients soient fonctions

[1] Voir *Theorie der Transf.-gr.*, t. I, p. 518.

des u seuls. Soient

$$C_k f = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{kj}(x \mid a \mid u \mid b) \frac{\partial f}{\partial b_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{18}$$

ces p transformations. Le crochet de deux d'entre elles étant aussi de la forme (17), on aura des relations

$$(C_i, C_k) = \sum_{l=1}^{p} K_{i,h,l}(u) C_l \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, p), \tag{19}$$

c'est-à-dire qu'en considérant les x, les a et les u comme des constantes, elles définissent un groupe simplement transitif. On peut du reste supposer que les K ne dépendent pas des u. Remarquons en effet que toute transformation infinitésimale, échangeable avec chacune des transformations (16), admet comme invariants les fonctions $u_1, \ldots, u_q$, et est par suite de la même forme que les transformations (18) et est aussi échangeable avec chacune d'elles; rappelons-nous que, d'après un résultat de M. Lie (¹), il y a précisément p de ces transformations, linéairement indépendantes, formant un groupe

$$D_k f = \sum_{j=1}^{p} \delta_{kj}(x \mid a \mid u \mid b) \frac{\partial f}{\partial b_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{20}$$

Nous pouvons ajouter que ce groupe, relativement aux variables $b_1, \ldots, b_p$, est transitif; car si ces transformations (20) étaient liées par une relation linéaire et homogène, on en déduirait des invariants du groupe (16), ce qui ne peut être, ce groupe étant transitif. On voit donc que, relativement aux variables $b_1, \ldots, b_p$, les deux groupes (18) et (20) sont deux groupes simplement transitifs réciproques, et, par suite, ils ont même structure. Et comme la structure du groupe (20) s'exprime par des formules

$$(D_i D_k) = \sum_{l=1}^{p} K_{ihl} D_l \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, p),$$

où les K ne dépendent pas des variables u, il en est de même pour le groupe (18).

En définitive, nous sommes ramenés à l'intégration du système (15),

---

(¹) Voir *Theorie der Transf.-gruppen*, t. I, Chap. XX.

connaissant le groupe (18) simplement transitif qu'il admet, c'est-à-dire de nouveau au *problème normal* du n° 5. *Tout dépend donc de l'intégration d'une équation linéaire de la forme*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \vartheta_k(t) \mathrm{E}_k f = 0,$$

où figure le groupe adjoint du groupe des transformations infinitésimales échangeables à celles du groupe donné (1) : si ce groupe contient des transformations infinitésimales distinguées, il en sera de même du groupe (18), et il faudra, en plus, effectuer certaines quadratures.

Remarquons enfin que les développements qui précèdent nous fournissent le moyen de *déterminer, connaissant les transformations infinitésimales d'un groupe transitif, la structure du groupe des transformations échangeables;* car, la structure du groupe (18) ne dépendant pas des valeurs des u, on peut, pour la déterminer, donner à ces quantités, dans les formules (19), des valeurs arbitraires.

On pourra, ensuite, remplacer les C_k par d'autres combinaisons de même forme, de manière à mettre en évidence la structure ainsi déterminée.

8. Appliquons la méthode générale à un *cas particulier* important, étudié par M. Lie, celui où il n'y a pas, en dehors du groupe (1) lui-même, de transformation infinitésimale échangeable à toutes les siennes. Si le groupe n'est pas asystatique, cas déjà examiné, ses transformations infinitésimales distinguées constituent le groupe des transformations infinitésimales échangeables à toutes les siennes. Alors le groupe (20) ne se compose que de transformations distinguées, et il en est par suite de même du groupe (18). La question se résout donc par autant de quadratures indépendantes qu'il y a de transformations distinguées.

Si l'on considère en particulier le groupe formé de l'ensemble

$$\mathrm{A}_1 f, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_r f, \quad \mathrm{B}_1 f, \quad \ldots, \quad \mathrm{B}_r f$$

des transformations de deux groupes simplement transitifs réciproques, on voit qu'il est asystatique si le groupe $\mathrm{A}_k f$ n'a pas de transformations infinitésimales distinguées, et qu'il a, dans le cas contraire, autant de transformations distinguées que ce dernier. Remarquant, de plus, que la méthode

donnée fournit, si l'on veut, les équations canoniques du groupe considéré, et que, celles-ci connues, on peut en déduire aussitôt celles des sous-groupes, on arrive, avec M. Lie, à cette conclusion :

La détermination des équations finies d'un groupe simplement transitif, quand on connaît les transformations infinitésimales du groupe réciproque, exige uniquement autant de quadratures que le groupe contient de transformations infinitésimales distinguées. Ce résultat contient, comme cas particulier, celui dont l'énoncé termine le n° 4 de ce Travail.

On peut du reste l'établir directement, comme on le verra plus loin, et par une méthode qui conduit à des calculs plus simples.

9. Si l'on suppose connues, dans l'application de la méthode précédente, non seulement les transformations infinitésimales, mais aussi les équations finies canoniques des groupes (2) et (3), on pourra lui faire subir quelques modifications avantageuses que nous allons indiquer. Ce sera toujours le cas (*voir* n° 4), si le groupe (1) n'a pas de transformations infinitésimales distinguées; et, dans le cas général, cela nécessitera au plus certaines quadratures préliminaires (*voir* n°s 4 et 8).

Supposons donc qu'on ait mis le système (4) sous la forme (7) (8). On peut ici considérer comme connues les équations finies, et par suite les invariants du groupe (8). Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n de ces invariants (indépendants), et introduisons-les comme variables nouvelles, à la place de $a_{s+1}, \ldots, a_r$ par exemple. Les équations (8) se réduiront alors à

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial a_s} = 0, \tag{21}$$

et, en tenant compte de ces équations, les équations (7) prendront la forme

$$R_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}(x|v) \frac{\partial f}{\partial v_j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

où les ρ_{ij} ne dépendent pas de $a_1 \ldots a_s$, comme on le voit en écrivant que ces équations forment, avec les équations (21), un système complet.

Le même changement de variables effectué dans les transformations (3)

donne

$$B_k f = V_k f + B_k'' f \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$V_k f = \sum_{j=1}^{n} w_{kj}(x|v) \frac{\partial f}{\partial v_j}, \qquad B_k'' f = \sum_{h=1}^{s} \beta_{kh}''(x|v|a_1 \ldots a_s) \frac{\partial f}{\partial a_h};$$

et, comme le système (21) (22) admet toujours ces transformations, on voit facilement, d'abord, que les w_{kj} ne dépendent plus des a, d'où l'on conclut les relations

$$(V_i V_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{ikl} V_l \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r);$$

et ensuite que le système complet (22) admet les transformations V_k. Enfin, ces transformations forment, d'après ce qui précède, un groupe, et ce groupe est de nouveau semblable au groupe (1). On le voit en remarquant que si l'on prenait pour les v_i les fonctions $F_i(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_r)$, d'après le raisonnement qui a été fait pour le groupe (12), les w_{kj} seraient précisément les fonctions $\xi_{kj}(v_1 \ldots v_n)$. On est donc ramené à un problème de tous points semblable à celui du n° 7 et qu'on traitera de même. L'avantage est, ici, d'abord que le système (22) dépend de moins de variables que le système (14), et aussi qu'on peut considérer comme connues les équations finies du groupe V_k.

Enfin, la remarque précédente, sur la similitude du groupe (1) et du groupe V_k, conduit immédiatement à la première méthode donnée par M. Lie pour la détermination des divers types de groupes transitifs de structure donnée, et qui permet de *déterminer, par l'emploi au plus de quadratures, non seulement les transformations infinitésimales, mais aussi les équations finies canoniques de ces divers types*. La marche à suivre sera la même qu'à la fin du n° 6 : on déterminera les divers types de sous-groupes du groupe (2), on formera leurs invariants v et, au moyen du groupe (3), on en déduira les groupes V_k correspondants (¹).

(¹) Voir *Theorie der Transf.-gruppen*, t. I, Ch. XXII et t. III, Ch. XXVII.

III. — Autre méthode. Cas des groupes intransitifs.

10. Soit toujours à déterminer les équations finies du groupe

$$(1) \qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Supposant encore connues les transformations infinitésimales

$$(2) \qquad A_k f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(3) \qquad B_k f = \sum_{j=1}^{r} \beta_{kj}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

de deux groupes isomorphes au groupe (1), simplement transitifs et réciproques, nous ramenons encore la question à intégrer le système complet

$$(4) \qquad X_k f + A_k f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

qui admet les transformations infinitésimales connues (3). Mais nous ne voulons plus faire d'hypothèse sur la nature du groupe (1).

Résolvons les équations (4) par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial a_k}$, ce qui est toujours possible; employant toujours les notations de M. Lie, il vient

$$(5) \qquad P_k f = \frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) X_j f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les ψ_{jk} sont des fonctions introduites au n° 1 [éq. (4)]. Portons les valeurs ainsi trouvées dans les transformations (3), ce qui revient à faire les combinaisons

$$(6) \qquad Y_h f = B_h f - \sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a) P_k f = \sum_{j=1}^{r} \rho_{hj}(a_1 \ldots a_r) X_j f$$
$$(h = 1, 2, \ldots, r),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(7) \qquad \rho_{hj}(a) = - \sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a) \psi_{jk}(a) \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, r).$$

Des formules (7) on conclut facilement que le déterminant des ρ_{hj} n'est pas identiquement nul, de sorte que, si l'on considère les a comme des constantes, les transformations (6) définissent précisément le groupe (1). Du reste, si l'on suppose la structure commune des groupes (1), (2), (3) définie par les identités

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s, \qquad (A_i A_k) = \sum_s c_{iks} A_s, \qquad (B_i B_k) = \sum_s c_{iks} B_s,$$

un calcul direct facile donne, en partant des valeurs (6),

$$(Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s + \text{comb. lin. des P},$$

et, comme aucune combinaison linéaire des transformations infinitésimales (5) ne peut être indépendante des $\frac{\partial f}{\partial a_k}$, on en conclut simplement

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Remarquons enfin qu'il suffit de comparer la formule (7) à celles qui terminent la page 80 du t. I de la *Theorie der Transformations-gruppen* de M. Lie pour en conclure que nos fonctions ρ_{hj} sont bien les mêmes que celles qui figurent dans les équations finies du groupe adjoint, de sorte que les transformations (6) sont ce que deviennent les transformations (1) quand on y effectue la transformation définie par les équations finies

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de ce groupe. Résultat que l'on s'explique, du reste, bien facilement, en faisant, dans les équations (4), la transformation inverse de celle-là.

Quoi qu'il en soit, le problème est ramené à intégrer le système (5), connaissant les transformations (6) qui le laissent invariant, et l'on voit immédiatement que toutes les propriétés du groupe (1) vont influer sur la nature des opérations à effectuer dans cette intégration.

11. Reprenons d'abord le cas où le groupe (1) est transitif. En général, il n'y aura qu'à opérer exactement comme au n° 7 et l'on sera conduit aux mêmes résultats.

Mais supposons qu'on connaisse toutes les transformations infinitésimales

$$(8) \qquad Z_l f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{li}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p)$$

qui sont échangeables à toutes les transformations (1). Le système complet (5) les admet aussi et l'on a à opérer cette fois avec le groupe formé de l'ensemble des transformations (6) et (8). Ce groupe n'admet pas, en dehors de lui, de transformations infinitésimales échangeables à toutes les siennes. Si donc il ne contient pas de transformations infinitésimales distinguées, il est asystatique; de sorte que, si l'on exprime en fonction de n des transformations (6) et (8), toutes les autres, il y aura, parmi les coefficients, n fonctions indépendantes, qui seront des intégrales du système (5). Donc, dans ce cas, les équations finies du groupe (1) s'obtiennent par de simples éliminations.

Si, au contraire, le groupe (6), (8) contient ρ transformations infinitésimales distinguées, la méthode du n° 7, appliquée à ce groupe au lieu du groupe des $B_h f$, fournira $n - \rho$ intégrales sans intégration, et ramènera le calcul des ρ dernières à ρ quadratures indépendantes.

Donc, *la détermination des équations finies d'un groupe transitif, quand on connaît, en même temps que ses transformations infinitésimales, toutes celles qui leur sont échangeables, dépend au plus de quadratures.*

Ce résultat est, au fond, équivalent à celui du n° 8. Dans le cas où le groupe est simplement transitif, le raisonnement précédent est précisément celui que nous avions annoncé en terminant le n° 8.

12. Disons quelques mots du cas où le groupe (1) est intransitif. Supposons d'abord que les transformations (1) soient, comme formes linéaires en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, linéairement indépendantes; il en est de même des transformations (6). Alors $r < n$, et le système

$$P_k f = 0, \qquad Y_h f = 0 \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, r)$$

admet $n - r$ invariants qu'il faudra d'abord calculer; on les introduira ensuite comme variables et l'on sera ramené au *problème normal* du n° 5. Cela revient à la détermination préliminaire des invariants du groupe (1),

que l'on peut prendre justement pour les $n-r$ invariants précédents. Ce procédé peut, du reste, être employé dans tous les cas, mais dans les autres cas ceux que nous allons indiquer peuvent être plus avantageux.

Si nous supposons, en effet, que, parmi les transformations (1) et, par suite, (6), il y en ait, au sens indiqué, seulement $m < r$, n d'indépendantes, en exprimant les autres au moyen de celles-là, on obtiendra, comme au n° 7, des intégrales du système (5), en nombre σ par exemple. Si $\sigma = n$, le problème est achevé. Si $n > \sigma \geqq m$, il restera à déterminer, sans réduction en général dans ce problème, les $n-\sigma$ restantes. Enfin, si $\sigma = m$, en opérant, comme au n° 7, on sera ramené à un système de r équations, à $r+n-\sigma$ variables avec $m-\sigma$ transformations infinitésimales indépendantes, et il sera de nouveau nécessaire de déterminer d'abord $n-m$ intégrales, qui seront, par exemple, les invariants du groupe (1), avant d'être ramené au *problème normal* de M. Lie.

On voit donc que, pour les groupes intransitifs, au contraire de ce qui avait lieu pour les groupes transitifs, ce n'est qu'exceptionnellement que le problème pourra se ramener à l'intégration d'équations linéaires. Et cela était à prévoir, car la détermination des équations finies d'un groupe transitif entraîne celle de ses invariants et la recherche de ceux-ci comprend, comme cas particulier, l'intégration d'un système complet, absolument quelconque, qui peut toujours se mettre sous la forme

$$L_1 f = 0, \quad \ldots, \quad L_m f = 0,$$

les $L_k f$ étant des transformations infinitésimales échangeables.

IV. — Troisième méthode. — Extension au problème de l'intégration d'une équation de Lie.

13. La recherche des équations finies du groupe

$$(1) \qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

revient, comme l'on sait (*voir* par exemple n° 2), à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad Lf = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k f = 0.$$

Pour appliquer à cette équation la méthode d'intégration de M. Lie, nous commencerons par déterminer les transformations infinitésimales qui la laissent invariante et qui sont de la forme

$$\text{(3)} \qquad Yf = \sum_{k=1}^{r} \rho_k(t) X_k f.$$

Les fonctions $\rho_k(t)$ doivent satisfaire à l'identité $(L, Y) = 0$, qui s'écrit, en développant les calculs,

$$\sum_{s=1}^{r} \left(\frac{d\rho_s}{dt} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \lambda_j c_{jks} \rho_k \right) X_s f = 0.$$

Cette relation se décompose, les transformations (1) étant indépendantes, en les r suivantes :

$$\text{(4)} \qquad \frac{d\rho_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} c_{kjs} \lambda_j \rho_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Les constantes c_{kjs} sont celles qui définissent la structure du groupe (1), et l'on a tenu compte des relations

$$c_{jks} + c_{kjs} = 0.$$

Les équations (4) sont des équations linéaires à coefficients constants, dont l'intégration dépend, par suite, seulement de la résolution d'une équation algébrique. Elles admettent r solutions indépendantes, qui, portées dans (3), fourniront r transformations infinitésimales indépendantes

$$\text{(5)} \qquad Y_k f = \sum_{h=1}^{r} \rho_{kh}(t) X_h f \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

laissant invariante l'équation (2). Le crochet de deux d'entre elles, étant de la forme (3) et laissant encore invariante l'équation (2), est forcément une combinaison linéaire à coefficients constants des transformations (5); et, comme le groupe que celles-ci forment ne diffère pas, quand on traite t comme une constante du groupe (1), on peut supposer les transformations (5) choisies par exemple de manière que l'on ait, en même temps,

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s, \qquad (Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

On est dès lors ramené à un problème tout semblable à celui du n° 7, et l'on retrouverait par suite sans peine, par cette voie, tous les résultats précédemment obtenus sur la nature des intégrations que nécessite le problème considéré.

Remarquons que le système (4) est équivalent à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathrm{E}_k f = 0,$$

où les transformations infinitésimales $\mathrm{E}_k f$ sont, suivant la notation habituelle, celles du groupe adjoint du groupe (1), de sorte que l'on pourrait prendre pour les ρ_{rk} les coefficients qui figurent dans les équations canoniques de ce groupe adjoint. On en conclurait bien facilement que le résultat actuel ne diffère pas de celui du n° 10, lorsqu'on applique au système (5) (n° 10) la méthode de Mayer, en supposant que les groupes $\mathrm{A}_k f$ et $\mathrm{B}_k f$ y sont les groupes paramétriques canoniques.

Mais la méthode présente a l'avantage de ne supposer connus que les théorèmes les plus fondamentaux de la théorie des groupes.

14. Cette méthode a un autre avantage, celui de pouvoir s'étendre à l'intégration d'une *équation de Lie* quelconque

$$(6) \qquad \mathrm{A}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t)\mathrm{X}_k f = 0.$$

Cherchons en effet de nouveau les transformations de la forme

$$(3) \qquad \mathrm{Y}f = \sum_{k=1}^{r} \rho_k(t)\mathrm{X}_k f,$$

qui satisfont à l'identité $(\mathrm{A}f, \mathrm{Y}f) = 0$. Il vient, en développant les calculs,

$$\sum_{s=1}^{r}\left(\frac{d\rho_s}{dt} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} c_{jks}\theta_j\rho_k\right)\mathrm{X}_s f = 0,$$

c'est-à-dire que les ρ_k sont définis par le système linéaire

$$(7) \qquad \frac{d\rho_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} c_{kjs}\theta_j\rho_k,$$

équivalent à l'équation de Lie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) E_k f = 0, \tag{8}$$

où intervient le groupe adjoint de celui qui figure dans l'équation donnée (6), et que nous pouvons appeler l'*équation de Lie adjointe* à l'équation (6). Ce système linéaire intégré, on en déduira, comme précédemment, un groupe

$$Y_k f = \sum_{h=1}^{r} P_{kh}(t) X_h f \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{9}$$

auquel on peut supposer la structure c_{jks}, et l'on sera ramené au *problème normal* (*voir* n° 5) de M. Lie, c'est-à-dire à de nouvelles équations linéaires, ou à des quadratures auxiliaires, par les mêmes opérations qu'au n° 7.

Le fait essentiel de la réduction des équations de Lie aux équations linéaires, toutes les fois que le groupe correspondant est transitif, se trouve ainsi établi.

15. Une fois déterminées les transformations (9), on peut achever la question autrement, en imaginant que l'on cherche, d'autre part, les transformations infinitésimales échangeables avec chacune des transformations (1), ce qui a l'avantage de ne plus faire intervenir les fonctions $\theta_k(t)$. C'est un problème qu'il serait facile de traiter directement, mais nous nous contenterons de remarquer qu'il est équivalent, à certaines quadratures près, au plus, à celui de la détermination des équations finies du groupe (1). Car d'une part nous avons vu que, ces transformations une fois déterminées, le calcul des équations finies du groupe exige au plus des quadratures [1]; et M. Lie a montré d'autre part que ces transformations se déduisent par des éliminations des équations finies du groupe, supposées connues [2].

Nous pouvons alors supposer le groupe (1) transitif, car s'il ne l'est pas, on connaît ses invariants, et, en les prenant comme variables nouvelles, on

[1] *Voir* n° 11 : nous n'avons raisonné que sur les groupes transitifs, mais il est facile d'étendre les résultats aux groupes intransitifs, en remarquant que les invariants sont alors connus.

[2] Voir *Theorie der Transf.-gruppen*, t. I, p. 394, 513 et suivantes.

REMARQUES SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

I. — Sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique plane.

Toute courbe algébrique plane peut être transformée birationnellement en une autre courbe algébrique plane n'admettant pas d'autres points multiples que des points doubles à tangentes distinctes.

On a donné bien des démonstrations de ce théorème; la suivante, qui se rapproche de celle qui a été exposée par MM. Appell et Goursat dans leur Ouvrage sur les fonctions algébriques, ne paraîtra cependant peut-être pas dénuée d'intérêt, à cause de sa simplicité et de son entière rigueur.

Rappelons d'abord une propriété des *cycles* des courbes algébriques. Un cycle de degré n peut être représenté d'une infinité de manières sous la forme

$$(1) \qquad x = x_0 + t^n, \qquad y = y_0 + a_1 t^n + a_2 t^{2n} + \ldots + a_k t^{kn} + b_1 t^{kn+r} + \ldots,$$

avec les conditions

$$(2) \qquad k \geqq 1, \qquad 0 < r < n, \qquad b_1 \neq 0,$$

x et y désignant, dans un système quelconque de coordonnées trilinéaires, le rapport de deux des coordonnées à la troisième. Le nombre k est le même dans tous ces modes de représentation du cycle : nous l'appellerons, pour abréger le langage, le *rang* du cycle.

Pour établir ce lemme, nous remarquons que ce nombre k peut-être

défini par la propriété suivante : pour l'origine du cycle, les k premières dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ky}{dx^k}$ restent finies, tandis que la suivante $\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ devient infinie. On le voit immédiatement en tirant des équations (1) la valeur de y en fonction de x

$$y = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_k(x - x_0)^k + b_1(x - x_0)^{k+\frac{r}{n}} + \ldots,$$

et prenant les dérivées successives du second membre par rapport à x.

Cela posé, une transformation de coordonnées quelconque est définie par des formules

$$X = \frac{A}{C}, \qquad Y = \frac{B}{C},$$

où A, B, C sont des fonctions linéaires de x et y; et, pour qu'elle conduise à des formules de la même forme que les équations (1), il faut et il suffit, d'abord que C reste finie pour l'origine du cycle, et en second lieu que la tangente au cycle ne soit pas parallèle à la droite $A = 0$, c'est-à-dire que $\frac{dY}{dX}$ reste aussi finie pour l'origine du cycle. Cette dérivée est de la forme

$$\frac{dY}{dX} = \frac{B_1 + B_2\frac{dy}{dx}}{A_1 + A_2\frac{dy}{dx}},$$

et l'on a

$$\frac{dx}{dX} = -\frac{C^2}{A_1 + A_2\frac{dy}{dx}};$$

et l'on en conclut que la dérivée $\frac{d^qY}{dX^q}$ a pour dénominateur une puissance de l'expression $\left(A_1 + A_2\frac{dy}{dx}\right)$, qui ne s'annule pas pour l'origine du cycle, en vertu de l'hypothèse, et pour numérateur un polynome en $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^qy}{dx^q}$, qui reste donc fini en ce point, tant que q ne dépasse pas k.

Le nombre k ne peut donc pas diminuer par une transformation de coordonnées, et, par suite, ne peut pas augmenter non plus, à cause de la transformation inverse. Le lemme annoncé est donc établi ([1]).

([1]) Cette remarque nous paraît indispensable pour donner aussi à la démonstration de MM. Appell et Goursat, à laquelle nous faisions allusion en commençant, une entière rigueur.

Considérant une courbe algébrique plane quelconque, appliquons-lui la transformation Θ formée par le produit des deux suivantes : 1° une transformation projective *générale* T; 2° la transformation T′ définie par les formules

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{3}$$

où $f = 0$ est l'équation de la courbe considérée $\mathcal{C}$, après la transformation projective T. Pour la commodité du langage, nous interpréterons x et y comme des coordonnées cartésiennes, et, à cause de l'indétermination de la transformation T, on pourra supposer que les axes de coordonnées occupent, par rapport à la courbe $\mathcal{C}$, une position tout à fait quelconque.

Le théorème résultera des remarques suivantes :

(*a*). *La transformation Θ est birationnelle.* — En effet, les points de contact des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$, qui sont parallèles à une direction donnée, sont, quelle que soit cette direction, en nombre limité : car ce sont les points communs à cette courbe, supposée indécomposable, et à la courbe de degré moindre

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

dont l'équation ne peut se réduire à une identité, puisqu'on aurait alors, pour tous les points de $\mathcal{C}$, $\frac{dy}{dx} = \text{const.}$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ serait une droite, cas que l'on peut écarter. L'ensemble des droites D joignant deux points en lesquels les tangentes sont parallèles ne dépend donc que d'un paramètre : on peut par suite supposer l'axe des y, qui est arbitraire, tellement choisi qu'il ne soit parallèle qu'à un nombre limité de ces droites, c'est-à-dire qu'en général à un point (ξ, η) de la courbe transformée $\mathcal{C}'$ ne correspond qu'un point de la courbe $\mathcal{C}$.

(*b*). *La transformation Θ n'élève le degré d'aucun cycle.* — Cela résulte immédiatement de la première des équations (3). En particulier, tout cycle linéaire reste linéaire.

(*c*). Étudions maintenant l'*effet de la transformation Θ sur un cycle non linéaire.* On peut supposer (grâce à la transformation T) ce cycle représenté par les équations (1), d'où l'on déduit

$$\xi = x_0 + t^n, \qquad \eta = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 t^n + \ldots + k a_k t^{(k-1)n} + \left(k + \frac{r}{n}\right) b_1 t^{(k-1)n+r} + \ldots.$$

Si *donc le rang k* est plus grand que 1, le rang du cycle transformé sera inférieur d'une unité, sans que le degré ait changé. Si le rang k est égal à 1, il vient

$$\xi = x_0 + t^n, \qquad \eta = a_0 + \ldots + \frac{r}{n} b_r t^{r-n} + \ldots,$$

et comme $r < n$, on en déduit, par le procédé classique du retour inverse des suites, que la transformation Θ abaisse dans ce cas le degré du cycle.

On conclut de là que, *par une suite de transformations* Θ, *on peut ramener la courbe à n'avoir plus que des cycles linéaires*. Supposons donc ce premier résultat obtenu, et montrons qu'on peut faire en sorte qu'il n'y ait jamais plus de deux de ces cycles ayant même origine, et que deux tels cycles n'aient pas même tangente. C'est, sous une autre forme, le théorème à démontrer, et cela va résulter de quelques nouvelles remarques.

(*d*). Soient deux cycles de la courbe Σ ayant même origine : on peut (grâce à la transformation T) les supposer représentés par les formules

$$(1) \quad x = x_0 + t, \qquad y = y_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_h t^h + a_{h+1} t^{h+1} + \ldots,$$

$$(2) \quad x = x_0 + t, \qquad y = y_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_h t^h + a'_{h+1} t^{h+1} + \ldots \qquad (a'_{h+1} \neq a_{h+1}),$$

et les cycles transformés sont alors

$$\xi = x_0 + t, \qquad \eta = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 t + \ldots + h a_h t^{h-1} + (h+1) a_{h+1} t^h + \ldots,$$

$$\xi = x_0 + t, \qquad \eta = a_1 + 2a_2 t + \ldots + h a_h t^{h-1} + (h+1) a'_{h+1} t^h + \ldots$$

Si donc $h = 0$, les cycles transformés n'ont plus même origine ; si $h = 1$, ils ne sont plus tangents ; si $h > 1$, leur ordre de contact est inférieur à celui des cycles primitifs.

(*e*). *La transformation* Θ *n'introduit, comme points multiples nouveaux, que des points doubles*. Les points multiples introduits proviennent de la réunion des points de la courbe Σ qui ont même abscisse et des tangentes parallèles ; il s'agit donc de démontrer qu'on peut, par la transformation T, faire en sorte qu'il ne puisse y avoir plus de deux points ayant même abscisse et des tangentes parallèles, et que parmi ces deux points, aucun ne soit déjà un point multiple de Σ.

Comme on dispose en particulier de la direction de l'axe des y, il suffit

de montrer que les droites qui rencontrent $\mathcal{C}$ en trois points où les tangentes soient parallèles sont en nombre limité (1). Or cela revient à dire que, si l'on considère les tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à une direction, il n'y a pas, quelle que soit cette direction, trois points de contact en ligne droite. Comme, de plus, $\mathcal{C}$ n'est déterminée qu'à une transformation projective près (T), on peut faire cette hypothèse à moins que la courbe donnée n'ait cette propriété que, parmi les points de contact des tangentes issues d'un point *quelconque* P, il y en ait toujours trois en ligne droite : M, M_1, M_2.

Examinons ce qui en résulterait : P variant d'une manière continue, les points M, M_1, M_2 varient aussi d'une manière continue, car ils sont déterminés par une équation algébrique, dont les coefficients dépendent rationnellement des coordonnées de P. Si donc P se déplace sur la tangente en M à la courbe, la droite M_1M_2 pivotera autour du point M et les tangentes en M_1 et M_2 iront toujours se couper sur la tangente fixe en M. Si, par une projection, nous rejetons cette tangente à l'infini, nous aurons une courbe que toutes les droites parallèles à une même direction, celle de l'axe des y par exemple, couperont en deux points où les tangentes sont parallèles : soient (x,y), (x',y') ces deux points, qui varient en même temps d'une manière continue. Comme on a à la fois $x'=x$, $\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx}$, on en conclut $y'=y+a$, c'est-à-dire que la courbe admet une translation : puisqu'elle est indécomposable, elle se réduirait donc à une droite (2). Même ainsi, du reste, l'hypothèse examinée est impossible.

(*f*). *Les points doubles introduits ont des tangentes distinctes.* — Nous servant toujours du même mode de raisonnement, il nous suffira de démontrer qu'il n'y a pas, sur la courbe $\mathcal{C}$, une infinité de couples de points pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ aient même valeur. Soient en effet $(x,y)(x',y')$ les deux points d'un tel couple : ils varieraient ensemble d'une manière conti-

---

(1) Par les droites D joignant deux points où les tangentes sont parallèles, et dont l'une est un point multiple, un raisonnement fait plus haut montre qu'elles sont aussi en nombre limité. On peut donc supposer que l'axe des y n'est parallèle à aucune d'elles.

(2) On peut le montrer ainsi. L'équation $f(x,y)=0$ doit être identique à chacune des équations $f(x,y+na)=0$, où n est un entier arbitraire; développant cette dernière par la formule de Taylor, on en conclut que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identiquement nul; si l'équation est irréductible, elle est donc de la forme $x=\text{const}$.

nue, et des relations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2},$$

on déduirait

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{dx}{dx'}\right) = 0.$$

Donc ou bien $\frac{dy}{dx}$ est constant pour une suite continue de points de la courbe, qui est une droite; ou bien on a une infinité continue de couples de points, pour lesquels on a

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b;$$

mais c'est dire que la courbe admet une translation, et c'est encore une droite ([1]).

On voit donc bien que, par une suite de transformations Θ, on détruira tous les points multiples anciens, et qu'ils ne seront remplacés que par des points doubles à tangentes distinctes. Le théorème est donc démontré.

II. — Sur l'application du théorème d'Abel a la Géométrie.

On sait que l'on déduit immédiatement du théorème d'Abel certaines conditions transcendantes que doivent remplir nq points d'une courbe indécomposable de degré n donnée C, pour constituer le système des points d'intersections de cette courbe C avec une courbe quelconque de degré q, C_q. Pour démontrer que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, Clebsch, et les auteurs qui ont repris la question après lui, se servent des résultats du *problème de l'inversion* de Jacobi, et du *problème de l'inversion généralisé*. La démonstration que nous allons indiquer est tout autre. Elle s'appliquerait facilement au cas où la courbe C a des singularités quelconques : pour simplifier nous nous bornerons, avec Clebsch, au cas où elle ne présente que des points doubles à tangentes distinctes ou à rebroussement simple (dit de première espèce), qu'on peut supposer tous à distance finie.

([1]) Si l'on considère comme évidentes les remarques (e) et (f), comme le font MM. Appell et Goursat pour des points analogues de leur démonstration, on arrive au but plus rapidement. Mais les explications que nous donnons nous paraissent indispensables pour mettre les deux faits en question tout à fait hors de doute.

Nous pouvons supposer aussi que les asymptotes sont toutes à distance finie, et qu'aucune n'est parallèle à l'axe des y.

1. *Cas des courbes adjointes.* — Nous nous servirons du lemme suivant :

Toute intégrale abélienne de la courbe considérée $f(x,y) = 0$, n'ayant pas de point singulier à distance finie, est de la forme

$$\int \Phi(x,y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

où $\Phi(x,y)$ est un polynome adjoint. La démonstration est toute semblable à celle qui est donnée par MM. Appell et Goursat, au Chapitre VII de l'Ouvrage déjà cité, pour établir la forme des intégrales de première espèce. Nous admettons donc ce lemme et passons à la proposition à établir, qui peut s'énoncer ainsi qu'il suit, en désignant par d le nombre total des points doubles de C, et par $u_1(x,y), \ldots, u_p(x,y)$ un système d'intégrales normales de première espèce attachées à cette courbe :

Deux systèmes de $nq - 2d = s$ points de la courbe considérée

$$(1) \qquad (a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_s, b_s),$$

$$(2) \qquad (a'_1, b'_1), \quad (a'_2, b'_2), \quad \ldots, \quad (a'_s, b'_s),$$

étant liés par les relations

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{s} u_h(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} u_h(a'_s, b'_s) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

où les périodes sous-entendues par les signes $\equiv$ sont des périodes correspondantes, si l'un des systèmes constitue le système des points d'intersection (mobiles) d'une courbe adjointe de degré q avec la courbe proposée, il en est de même de l'autre.

Soit, en effet, $g(x,y) = 0$ la courbe adjointe que l'on suppose couper C, en plus des points doubles, aux points (2) par exemple. Les systèmes (1) et (2) peuvent avoir un certain nombre de points communs : désignons par (P) leur ensemble, par (M) celui des autres points (1), par (M′) celui des autres points (2). Si l'on supprime les termes communs aux deux membres dans les relations (3), elles expriment, en vertu de la réciproque

du théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce, qu'il existe une fraction rationnelle $R(x, y)$ admettant pour infinis les points (M′) et pour zéros les points (M). Si nous considérons alors l'intégrale abélienne

$$\int R(x, y) \frac{g(x, y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

on voit facilement qu'elle n'a aucun point singulier à distance finie; elle est donc, en vertu du lemme, de la forme

$$\int h(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$h(x, y) = 0$ étant une nouvelle courbe adjointe, c'est-à-dire que l'on a

$$R(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)},$$

et, par suite, les zéros de $h(x, y)$ doivent être, en plus des points doubles de C, qui comptent pour $2d$, les points (M), zéros de R, et les points (P), zéros de $g(x, y)$ qui ne sont pas des infinis de R. La courbe $h(x, y) = 0$ est donc une courbe adjointe ayant les points (1) pour ses points d'intersection (mobiles) avec C et, dès lors, est en plus de degré q. Le théorème est donc établi.

2. *Cas des courbes non adjointes.* — Parmi les points doubles de la courbe, on met à part p' points à tangentes distinctes, que nous appellerons les points (A), et p'' points de rebroussement, que nous nommerons les points (B). A chacun des premiers correspond, comme l'on sait, une intégrale normale de troisième espèce

$$\varpi_i(x, y) = \int \psi_i(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p'),$$

et à chacun des points (B) une intégrale normale de seconde espèce

$$\zeta_j(x, y) = \int \chi_j(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p'');$$

chacune des courbes $\psi_i = 0$, $\chi_j = 0$ étant de degré $n - 3$, et passant par

tous les points multiples de la courbe C, sauf le point correspondant. Cela posé, le théorème à établir peut s'énoncer ainsi :

Deux systèmes de $s = nq - 2(d - p' - p'')$ points de la courbe considérée

$$(1) \qquad (a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_s, b_s),$$

$$(2) \qquad (a'_1, b'_1), \quad (a'_2, b'_2), \quad \ldots, \quad (a'_s, b'_s),$$

étant liés par les $p + p' + p''$ relations

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{s} u_h(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} u_h(a'_s, b'_s) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{s} \varpi_i(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} \varpi_i(a'_s, b'_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p'),$$

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{s} \zeta_j(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} \zeta_j(a'_s, b'_s) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p''),$$

où les périodes sous-entendues par les divers signes $\equiv$ sont des périodes correspondantes (en tant que périodes cycliques), si l'un des systèmes constitue le système des points d'intersection (mobiles) de la courbe proposée C *avec une courbe de degré q, assujettie à passer par tous les points multiples de* C, *autres que les points* (A) *et* (B), *il en est de même de l'autre système de points.*

Désignons encore par $g(x, y) = 0$ la courbe de degré q, dont le système complet des points d'intersection avec C se compose, par hypothèse, des points doubles de C autres que les points (A) et (B) (chacun compté double) et des s points (2). Représentons de nouveau par (P) l'ensemble des points communs à (1) et (2), par (M) et (M′) l'ensemble des autres points (1) et (2), respectivement; et imaginons qu'on ait rayé les termes communs aux deux membres de chacune des égalités (3), (4) et (5). Cela fait, en vertu des égalités (3) et de la réciproque du théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce, il existe une fraction rationnelle $R(x, y)$ ayant pour ses zéros les points (M) et, pour ses infinis, les points (M′). Si, de plus, on compare les égalités (3), (4), (5), à celles que fournit l'application à cette fraction rationnelle R du théorème d'Abel pour chacune des intégrales u_h, ϖ_i, ζ_j, on voit que cette fonction R jouit des propriétés sui-

vantes : 1° en chacun des points (A), elle prend la même valeur sur les deux branches de la courbe qui se coupent en ce point; 2° en chacun des points (B), la différentielle $d\mathrm{R}$ est nulle.

Si l'on considère alors de nouveau l'intégrale abélienne

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{R}(x, y) \frac{g(x, y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

on voit sans peine : d'abord, qu'elle n'a d'autres points singuliers possibles à distance finie que les points de la courbe superposés aux points (A), et les points (B); et, ensuite, qu'en ces points elle devient infinie comme les fonctions $\lambda_i \varpi_i$, $\mu_j \zeta_j$ respectivement, les λ et μ étant des constantes convenablement choisies.

Dès lors, l'intégrale abélienne

$$\mathrm{I} - \sum_{i=1}^{p'} \lambda_i \varpi_i - \sum_{j=1}^{p''} \mu_j \zeta_j$$

est, d'après le même lemme que dans le premier cas, de la forme

$$\int \Phi(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

Φ étant un polynome adjoint, et l'on en conclut que $\mathrm{R}(x, y)$ est de la forme

$$\mathrm{R}(x, y) = \frac{\Phi(x, y) + \Sigma \lambda_i \psi_i(x, y) + \Sigma \mu_j \chi_j(x, y)}{g(x, y)} = \frac{h(x, y)}{g(x, y)},$$

où la courbe $h(x, y) = 0$ passe visiblement par tous les points doubles de C autres que les points (A) et les points (B). Comme, de plus, ses autres points communs avec C doivent être, à cause des zéros et des infinis de R, les points (M) et les points (P), il en résulte qu'elle est de degré q et que c'est la courbe annoncée.

III. — Remarque sur les transformations rationnelles des courbes algébriques.

Supposons qu'à la courbe algébrique de genre p

(C) $$f(x, y) = 0$$

corresponde, par une *transformation simplement rationnelle*

(T) $$\xi = \mathrm{M}(x, y), \qquad \eta = \mathrm{N}(x, y),$$

une courbe algébrique de genre inférieur ϖ

(γ) $$\varphi(\xi, \eta) = 0,$$

de sorte qu'à un point quelconque (ξ, η) de courbe γ correspondent, par exemple, q points de (C)

(1) $$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_q, y_q).$$

Désignons par Σ une surface de Riemann correspondant à la courbe (γ), et S une surface de Riemann correspondant à la courbe (C), et qu'on peut se représenter, par exemple, comme formée de q feuillets appliqués sur Σ, en prenant pour Σ une surface fermée avec ϖ trous ([1]). Le point (ξ, η) se déplaçant d'une manière continue sur Σ, les q points (1) se déplacent aussi d'une manière continue sur S; et si le point (ξ, η) décrit ainsi sur Σ un contour fermé, il en résulte une certaine permutation des points (1). De plus, la surface S étant connexe, puisque la courbe (C) est supposée indécomposable, on peut choisir le contour fermé par lequel (ξ, η) revient à sa position initiale, de façon que deux quelconques des points (1), choisis à l'avance, se succèdent par la permutation correspondante.

Cela posé, soit $u(x, y)$ une intégrale de première espèce, quelconque, de la courbe (C), et considérons la somme

(2) $$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + \ldots + u(x_q, y_q).$$

Si on lui applique le raisonnement célèbre par lequel Riemann démontre le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce, on voit que c'est une fonction de (ξ, η), dont la différentielle est rationnelle, et qui reste finie en tout point de Σ. C'est donc une intégrale de première espèce ([2]) $w(\xi, \eta)$ de la courbe (γ)

(3) $$\sum_{k=1}^{q} u(x_k, y_k) = w(\xi, \eta).$$

([1]) Cette idée a été déjà utilisée par M. Hurwitz dans son Travail : *Ueber Algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (*Math. Annalen*, t. XLI).

([2]) Ce résultat a été aussi indiqué par M. Hurwitz dans une note de son Mémoire *Sur le Principe de correspondance* (*Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wiss.*, 1886); mais les remarques qui suivent nous paraissent nouvelles.

Écrivons les relations de cette forme pour p intégrales de première espèce indépendantes attachées à la courbe (C)

$$\sum_{k=1}^{q} u_h(x_k, y_k) = w_h(\xi, \eta) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p). \tag{4}$$

Comme la courbe (γ) est de genre $\varpi < p$, les seconds membres sont fonctions linéaires à coefficients constants de ϖ intégrales $w(\xi, \eta)$ seulement. On peut donc choisir les intégrales $u_h(x, y)$ de manière que, dans $p - \varpi$ au moins des relations (4), les seconds membres soient constants. Il est du reste impossible que cela ait lieu dans plus de $p - \varpi$ de ces relations, car toute intégrale $w(\xi, \eta)$ se change, par la transformation (T), en une intégrale de première espèce de (C) que l'on peut représenter par $\frac{1}{q} u(x, y)$, de sorte qu'on peut écrire

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{q} u(x_1, y_1) = \frac{1}{q} u(x_2, y_2) = \ldots = \sum_{k=1}^{q} u(x_k, y_q).$$

On doit donc obtenir, dans les seconds membres des équations (4), ϖ intégrales indépendantes et, par suite, on en peut déduire *exactement* $p - \varpi$ relations de même forme, à seconds membres constants. On peut donc énoncer le résultat suivant :

A la transformation simplement rationnelle considérée correspond un système de $p - \varpi$ intégrales abéliennes de première espèce de la courbe (C), $U_h(x, y)$, *linéairement indépendantes, telles que les différents points* (1) *qui correspondent à un même point de la courbe transformée* (γ) *sont liés, quel que soit ce point, par les $p - \varpi$ relations transcendantes*

$$\sum_{k=1}^{q} U_h(x_h, y_k) = K_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, p - \varpi), \tag{5}$$

où les seconds membres sont des constantes.

Ces relations (5), qui rappellent d'une manière frappante les équations du théorème d'Abel pour les intégrales abéliennes, peuvent être considérées comme en fournissant une généralisation. Car on retombe sur le théorème d'Abel lui-même, si l'on suppose que la courbe (γ) est unicursale : on peut en effet supposer alors qu'on ait fait en sorte, par une transformation bira-

tionnelle, que η soit une fonction rationnelle de ξ, et alors les points (1) sont les zéros de l'équation $\xi = M(x, y)$.

A un autre point de vue, le résultat précédent est lié à la question si importante de la réduction des intégrales abéliennes. Nous allons montrer en effet que *les intégrales* $U_h(x, y)$ *constituent un système de* $p - \varpi$ *intégrales de première espèce, se réduisant au genre* $p - \varpi$.

Pour le démontrer, reprenons la relation générale (3). Supposons qu'on ait tracé sur Σ et sur S respectivement deux systèmes de sections canoniques, et désignons par $a_1 \ldots a_p$, $b_1 \ldots b_p$ les modules de périodicité de l'intégrale $u(x, y)$, par $\alpha_1 \ldots \alpha_\varpi$, $\beta_1 \ldots \beta_\varpi$ ceux de l'intégrale $w(\xi, \eta)$. Si le point (ξ, η) décrit un cycle quelconque, chacun des points (1) pourra traverser une ou plusieurs sections canoniques de S, une ou plusieurs fois, de sorte que le premier membre de l'identité (3) reprendra la même valeur augmentée de certains multiples des modules de périodicité de $u(x, y)$, ces multiples ne dépendant que du contour décrit par le point (ξ, η) et non de l'intégrale considérée. Si donc on prend pour ce contour, successivement, chacune des courbes dont les deux bords forment les sections canoniques de Σ, on obtiendra 2ϖ relations de la forme

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=1}^{p} m_{kh} a_h + \sum_{h=1}^{p} n_{kh} b_h = \alpha_k & (k = 1, 2, \ldots, \varpi), \\ \displaystyle\sum_{h=1}^{p} m'_{kh} a_h + \sum_{h=1}^{p} n'_{kh} b_h = \beta_k & (k = 1, 2, \ldots, \varpi), \end{cases}$$

où les entiers m_{kh}, n_{kh}, m'_{kh}, n'_{kh} sont les mêmes, quelle que soit l'intégrale considérée $u(x, y)$.

De plus, les premiers membres des relations (6) sont 2ϖ formes linéaires des a_h et des b_h, linéairement indépendantes, car nous avons vu qu'on peut choisir $u(x, y)$ de manière que $w(\xi, \eta)$ soit une intégrale de première espèce *quelconque* de la courbe (γ), de sorte que les 2ϖ périodes $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varpi$, $\beta_1, \ldots, \beta_\varpi$ sont indépendantes.

Dès lors, si nous appliquons les relations (6) aux intégrales $U_h(x, y)$, les intégrales $w(x, y)$ correspondantes sont des constantes, en vertu des relations (5), et les seconds membres des relations (6) sont nuls. Les modules de périodicité de ces différentes intégrales sont donc liés par les

2ϖ relations indépendantes

$$\sum_{h=1}^{p} m_{kh} A_{jh} + \sum_{h=1}^{p} n_{kh} B_{jh} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varpi),$$

$$\sum_{h=1}^{p} m'_{kh} A_{jh} + \sum_{h=1}^{p} n'_{kh} B_{jh} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varpi)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p - \varpi)$$

et, par suite, s'expriment par les mêmes combinaisons linéaires à coefficients entiers d'un certain système de $2(p - \varpi)$ périodes indépendantes.

Si nous remarquons enfin que, d'après ce qui précède, on peut associer aux $p - \varpi$ intégrales $U_h(x, y)$, pour constituer un système de p intégrales indépendantes de première espèce attachées à la courbe C, ϖ intégrales provenant des intégrales de (γ) par la transformation (P) et qui, par suite, se réduisent de leur côté au genre ϖ, nous voyons que nous retrouvons ici, avec l'*interprétation des deux systèmes d'intégrales réductibles,* un cas particulier du théorème général donné par M. Picard dans le cas de $p = 2$, puis par M. Poincaré dans le cas général : *Lorsqu'un système de ϖ intégrales abéliennes de première espèce, d'une courbe de genre p, s'abaisse au genre ϖ, il existe un système complémentaire de $p - \varpi$ intégrales de première espèce de la même courbe, s'abaissant au genre $p - \varpi$.*

SUR

L'ÉTUDE CALORIMÉTRIQUE COMPLÈTE

DES LIQUIDES SATURÉS,

PAR M. E. MATHIAS,

Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. *Introduction.* — Un liquide, en présence de sa vapeur saturée, est complètement connu au point de vue calorimétrique quand on a déterminé la loi de variation avec la température des quantités suivantes :

Chaleur de vaporisation interne et externe;

Chaleur spécifique du liquide saturé;

Chaleur spécifique de la vapeur saturée.

Ce Mémoire a pour but d'indiquer une méthode générale, directe et sûre pour arriver à la connaissance des trois éléments précédents; cela constitue ce que j'appelle l'*étude calorimétrique complète d'un liquide saturé*.

La méthode s'applique tout naturellement aux gaz liquéfiés qui rentrent dans le *cas général* des liquides saturés.

Historique. — L'historique de la détermination expérimentale de la chaleur de vaporisation des gaz liquéfiés a été fait dans ma thèse [1]. Je rappellerai seulement que la méthode calorimétrique à température constante, que j'ai proposée et mise en œuvre pour cet objet, donne directement la chaleur de vaporisation des corps *à la température ordinaire des laboratoires*, et ce n'est que dans le cas de l'acide carbonique et du protoxyde d'azote que j'ai pu l'utiliser pour trouver, jusqu'à la température critique, la variation de la chaleur de vaporisation.

Il faudrait faire subir à cette méthode des modifications sérieuses pour

[1] *Ann. de Chim. et de Phys.*, 1890, et *Journ. de Phys.*, 2e série, t. IX, p. 449; 1890.

l'appliquer, exclusivement à tout autre, à des corps dont la température critique est très supérieure à la température ambiante. Dans le cas général, ma méthode semble donc perdre beaucoup de l'intérêt qu'elle avait présenté dans le cas de l'acide carbonique et du protoxyde d'azote. La suite de ce Mémoire montrera que ce n'est là qu'une apparence et que l'intérêt de la méthode reste entier puisque les données qu'elle fournit interviennent nécessairement et naturellement dans la solution du problème très général que je me suis posé.

La chaleur spécifique des gaz liquéfiés a été très peu étudiée. Les expériences de Regnault sur ce sujet ont été perdues en 1870; on sait seulement que, d'après lui, pour l'acide carbonique, la chaleur spécifique du liquide ne doit pas être éloignée de 0,300 et qu'elle doit être 0,799 pour l'ammoniaque liquéfiée (¹). Depuis, il n'y a guère eu que quatre mesures de Nadejdine (²) sur l'acide sulfureux liquide entre —20° et +10° et quelques récentes mesures de MM. C. Ludeking et J.-E. Starr sur l'ammoniaque liquide entre 26° et 46° (³).

Nadejdine se proposait de chercher les relations existant entre les capacités calorifiques et les autres propriétés calorifiques des liquides. Ses déterminations expérimentales étaient faites par la méthode de Wüllner.

Des sphères de verre (chaleur spécifique 0,197) étaient remplies des liquides expérimentés (40^{gr} à 50^{gr}) et fermées hermétiquement, soit en étirant le col, soit par un bouchon de liège dans lequel était encastré un thermomètre.

Pour les températures supérieures à 0°, le réchauffeur était un bain de mercure; pour les températures inférieures à 0°, Nadejdine employait un mélange de neige et de sel placé dans le compartiment intérieur d'un calorimètre de Lavoisier et Laplace. Enfin, l'appareil était plongé dans un calorimètre. Nadejdine a trouvé ainsi, pour la chaleur spécifique moyenne k de l'acide sulfureux liquide :

Entre	—20°,5 et	+ 9°,0	$k = 0,3159$
	—20,2	+10,1	$k = 0,3190$
	—21,0	+10,9	$k = 0,3200$
	—20,6	+ 9,2	$k = 0,3162$

(¹) *Voir* REGNAULT, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 4ᵉ série, t. XXIV, p. 402; 1871.

(²) *Exner Repertorium*, t. XX, p. 446.

(³) *Silliman's Journal*, mars 1893.

Ces nombres ont servi à vérifier une formule empirique sur laquelle je n'insisterai que peu dans ce Travail.

C'est dans le but de déterminer une constante utile à l'étude du froid artificiel que MM. Ludeking et Starr ont mesuré la chaleur spécifique de l'ammoniaque liquide. A cet effet, 10^{gr} environ de ce corps étaient introduits sous la pression atmosphérique dans un petit cylindre d'acier de $16^{cc},122$ de capacité, fermé par une vis en acier et préalablement refroidi. Un très petit volume de vapeur saturée surmontait le liquide de façon à pouvoir négliger la correction due à la chaleur de vaporisation du liquide.

Le cylindre d'acier était placé dans l'appareil à chaleur spécifique de Regnault, chauffé par la vapeur de sulfure de carbone. Le mode expérimental suivi était, dans tous ses détails, celui de Regnault. L'influence du rayonnement était réduite au minimum par la méthode de compensation de Rumford.

Pour essayer d'apprécier et de corriger l'erreur provenant de la chaleur de vaporisation, une deuxième série d'expériences fut faite dans laquelle le cylindre d'acier était refroidi dans une bombe en fer placée dans la glace fondante, puis introduit dans un calorimètre à eau chaude. Les résultats des deux séries d'expériences furent les suivants :

$$\left.\begin{matrix}0,888\\0,897\\0,896\end{matrix}\right\}\text{ première série ;}\qquad\left.\begin{matrix}0,878\\0,863\\0,892\end{matrix}\right\}\text{ deuxième série.}$$

La moyenne générale 0,8857 a été adoptée par les auteurs.

Comme on le voit, les auteurs précédents ont laissé de côté toute correction directe relative à la chaleur de vaporisation et à la chaleur spécifique de vapeur saturée. Or, dans le cas de l'ammoniaque liquéfiée, en particulier, la chaleur de vaporisation est énorme ; elle est, en effet, d'après Regnault, voisine de 300^{Cal} à la température ordinaire [1].

En ce qui concerne la chaleur spécifique de vapeur saturée, elle n'a été, sauf erreur, l'objet d'aucune mesure expérimentale jusqu'à ce jour ; elle était, pour ainsi dire, une conception purement théorique et l'on se contentait de la calculer en fonction de la chaleur spécifique du liquide et de la

---

(1) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 4e série, t. XXIV, p. 422-423.

2° La chaleur spécifique m du liquide saturé est infiniment grande et positive; le rapport $\frac{m'}{m}$ tendant vers -1 (Raveau).

Je rappellerai seulement que je suis arrivé en même temps que M. Duhem et par une voie différente à la conclusion précédente relative à la chaleur spécifique de vapeur saturée, cette conclusion impliquant l'existence d'un *maximum* de la chaleur spécifique de vapeur saturée et d'un *second point d'inversion* situé par rapport au *premier* plus près de la température critique. Malheureusement, ma démonstration donnait prise à une objection provenant de ce que la chaleur spécifique du liquide étant infinie et positive à la température critique, la relation

$$m' = m + \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{T}$$

se présente sous la forme illusoire $\infty - \infty$.

Je me propose, dans ce qui suit, de soumettre à la sanction de l'expérience les considérations théoriques précédentes.

2. Exposé de la méthode expérimentale employée. — L'expérience, conduite comme il suit, permet de déterminer la loi de variation des quantités λ, m, m'. Il suffit, pour cela, de disposer d'un récipient métallique A très résistant [1], *rempli une fois pour toutes* à basse température d'un gaz liquéfié pur et fermé hermétiquement par un robinet à pointeau R. Je suppose connue, par des expériences antérieures, la loi de variation des deux sortes de densités d et d' (liquide et vapeur saturée); si l'on détermine par différence le poids total P du fluide et, par des jaugeages à l'eau, le volume intérieur v_0 de l'enveloppe A à la température de la glace fondante, l'équation

$$v = \frac{\pi}{d} + \frac{P - \pi}{d'}$$

permet d'en déduire les poids π et $P - \pi$ du liquide et de la vapeur saturée à la température $t°$ qui correspond au volume v et aux densités d et d'.

Première série d'expériences. — Soit à mesurer la chaleur spécifique

(1) Afin qu'on puisse négliger les variations du volume intérieur sous l'influence de la pression du gaz liquéfié.

moyenne du liquide saturé entre la température ambiante et une température t° plus élevée.

On calcule le *poids du liquide* qui remplit le volume v (¹) à la température $t+\varepsilon$, supérieure à t de quelques dixièmes de degré; puis on enlève l'excédent de gaz. Soit P le poids total du gaz liquéfié qui charge l'appareil. Au moyen d'une étuve à température constante, on porte A à t°; on l'y maintient pendant plusieurs heures, puis on le plonge dans un calorimètre à eau. Soient

π et $P-\pi$ les poids du liquide et de la vapeur saturée à la température initiale t° du corps;
π' et $P-\pi'$ les poids du liquide et de la vapeur saturée à la température finale θ° du calorimètre;
M le poids en eau du récipient A vide;
q la quantité de chaleur dégagée;

l'expression suivante, dans laquelle tout est connu expérimentalement,

$$Q = q - M(t-\theta)$$

représente la chaleur à fournir au mélange de liquide et de vapeur saturée à θ° pour le porter *à volume constant* (²) à la température t° à laquelle tout le corps est sensiblement à l'état de liquide saturé, le poids $P-\pi$ de la vapeur saturée étant de l'ordre du milligramme ou au plus du centigramme.

Partant du même *état initial*, on peut arriver au même *état final* en imaginant d'autres transformations du mélange. Soient Q et T, Q′ et T′, Q″ et T″, ... la chaleur fournie et le travail extérieur produit dans la transformation à volume constant et dans les *autres;* le principe de l'équivalence donne, en remarquant que T = o très sensiblement,

$$Q = Q' - \frac{1}{E}T' = Q'' - \frac{1}{E}T'' = \ldots \tag{1}$$

Transformation auxiliaire. — Vaporisons à θ° un poids $\pi'-\pi$ de liquide; si ρ_θ est la *chaleur de vaporisation interne* du liquide à θ°, la

(¹) On suppose connu le coefficient de dilatation cubique de récipient A, qui est très petit.

(²) La variation de volume provenant de la dilatation de l'enveloppe A est négligeable en général, si l'on considère l'équivalent calorifique du travail extérieur qu'elle détermine.

chaleur fournie, abstraction faite du travail externe de la vaporisation, est $(\pi'-\pi)\rho_\theta$. On a alors un poids $\pi'-(\pi'-\pi)=\pi$ de liquide et un poids $P-\pi$ de vapeur saturée à θ°. Portons séparément ces deux corps à t° en les maintenant saturés; la chaleur absorbée par le liquide est

$$\pi x_\theta^t,$$

x_θ^t étant la chaleur à fournir à 1^{gr} de liquide saturé pour le porter de θ° à t° en le laissant saturé. Le travail extérieur produit dans cette transformation est alors

$$\pi \int_\theta^t p\,du,$$

en appelant p la pression de vapeur saturée qui correspond au volume spécifique u du liquide saturé.

De même, la chaleur fournie à la vapeur saturée est

$$(P-\pi)y_\theta^t,$$

y_θ^t étant la chaleur à fournir à 1^{gr} de vapeur saturée pour la porter de θ° à t° en la laissant saturée. Le travail extérieur produit dans cette transformation est

$$(P-\pi)\int_\theta^t p\,du'$$

en appelant u' le volume spécifique de la vapeur saturée qui correspond à p.

En vertu de l'équation (1), il vient

$$(2)\qquad Q=(\pi'-\pi)\rho_\theta+\pi x_\theta^t+(P-\pi)y_\theta^t-\frac{\pi}{E}\int_\theta^t p\,du-\frac{P-\pi}{E}\int_\theta^t p\,du'.$$

Si l'on connaît la variation de p en fonction de la température et la chaleur de vaporisation à la température ambiante, ρ_θ est connu ainsi que les intégrales $\int p\,du$ et $\int p\,du'$ qui peuvent être calculées à l'avance. Si l'on remarque que le coefficient $P-\pi$ de y_θ^t et de $\int p\,du'$ est extrêmement petit, et que $\frac{1}{E}\int_\theta^t p\,du$ est sensiblement nul à moins que t ne soit très voisin de la température critique du corps, on pourra, à titre de première approximation, supprimer dans l'équation (2) les trois derniers termes du second

membre et écrire

$$(2)' \qquad Q = (\pi' - \pi)\rho_\theta + \pi x'_\theta,$$

ce qui donnera de x'_θ une première valeur très approchée en général. La petitesse de $\pi' - \pi$ permettra même de remplacer au besoin ρ_θ par une valeur simplement approchée.

Pour opérer à une température t' plus élevée que t, on calculera de nouveau le *poids de liquide* P′ qui remplirait A à $t' + \varepsilon'$ (ε' = quelques dixièmes de degré). Comme $P' < P$, on enlèvera de nouveau du gaz, et ainsi de suite jusqu'à la température critique. On aura ainsi des valeurs très approchées de x'_θ, θ variant très peu comme la température de la salle calorimétrique, t ayant, au contraire, des valeurs croissantes jusqu'au voisinage immédiat de la température critique du liquide expérimenté.

On n'a ainsi que des valeurs approchées de x'_θ; pour le calcul rigoureux il faut, de toute nécessité, passer à la *seconde série d'expériences*.

Seconde série d'expériences. — Actuellement, le récipient A contient un poids total de liquide et de vapeur saturée tel qu'à la température critique t_c du corps, il serait rempli du fluide sous la densité critique Δ. Si l'on continue à enlever du gaz, à aucune température le vase A ne pourra plus être exactement rempli par le liquide seul, *mais il pourra l'être par de la vapeur saturée.*

La méthode expérimentale précédente, modifiée dans ce sens, devra fournir la chaleur spécifique de la vapeur saturée au lieu de la chaleur spécifique du liquide saturé.

Soit donc à mesurer la chaleur spécifique moyenne de la vapeur saturée entre la température ambiante et une température t° plus élevée.

On calcule le *poids de vapeur saturée* P qui remplit le vase A à t°, puis on enlève l'excédent de gaz. Au moyen de l'étuve, on porte A à la température $t^\circ + \varepsilon$ (¹) supérieure à t° de plusieurs dixièmes de degré; on l'y maintient pendant plusieurs heures, puis on le plonge dans un calorimètre à eau. Soient

π et $P - \pi$ les poids du liquide et de la vapeur saturée à la température finale θ° du calorimètre;

(¹) On pourrait aussi faire en sorte qu'il ne restât qu'une trace de liquide au contact de la vapeur saturée. Les considérations développées à la fin de ce Mémoire montreront quel intérêt il peut y avoir à opérer d'une façon plutôt que de l'autre.

A la place de la transformation auxiliaire précédente, nous aurions pu imaginer la suivante.

Deuxième transformation auxiliaire. — On porte de 0° à t° respectivement le poids π de liquide et le poids $P - \pi$ de vapeur saturée, en maintenant séparément la saturation, ce qui absorbe les quantités de chaleur

$$\pi x_0^t \quad \text{et} \quad (P-\pi) y_0^t$$

et développe les travaux extérieurs

$$\pi \int_0^t p\, du \qquad \text{et} \qquad (P-\pi) \int_0^t p\, du'.$$

Enfin à t° on vaporise le poids π de liquide, ce qui, abstraction faite du travail extérieur, absorbe la quantité de chaleur

$$\pi \rho_t,$$

ρ_t étant la chaleur de vaporisation interne à t°. En vertu de l'équation (1), il vient

$$(4) \qquad Q = \pi\rho_t + \pi x_0^t + (P-\pi) y_0^t - \frac{\pi}{E}\int_0^t p\, du - \frac{P-\pi}{E}\int_0 p\, du'.$$

La seule inconnue est donc ici ρ_t, puisque y_0^t et x_0^t sont connus par ce qui précède; l'équation (4) fournit donc immédiatement *la chaleur de vaporisation interne* lorsqu'on a déterminé préalablement les quantités x_0^t et y_0^t.

Cas général de la seconde série d'expériences. — Ce cas se présente lorsque, à la température constante t° de l'étuve, il reste du liquide en présence de la vapeur saturée. Conservons les notations de la page 8 (*seconde série d'expériences*) et soient π' et $P - \pi'$ les poids du liquide et de la vapeur saturée à la température initiale t°.

L'expression suivante

$$Q = q - M(t - \theta)$$

représente la chaleur à fournir au mélange de liquide et de vapeur à 0° pour le porter *à volume constant* à la température t°. La première transformation auxiliaire donne alors, en vaporisant le poids $(\pi - \pi')$ de liquide à la

température 0,

$$(3') \quad Q = (\pi - \pi')\rho_0 + (P - \pi')y_0^t + \pi' x_0^t - \frac{\pi'}{E}\int_0^t p\,du - \frac{P - \pi'}{E}\int_0^t p\,du'.$$

On voit que, dans ce cas, y_0^t n'est plus expérimentalement indépendant de x_0^t.

La seconde transformation auxiliaire donne alors

$$(4') \qquad Q = (\pi - \pi')\rho_t + \pi x_0^t + (P - \pi)y_0^t - \frac{\pi}{E}\int_0^t p\,du - \frac{P - \pi}{E}\int_0^t p\,du',$$

et ρ_t est donné absolument comme dans la formule (4), à cela près que le coefficient qui le multiplie, $\pi - \pi'$, est devenu plus petit.

Avant d'indiquer comment on a conduit le calcul des quantités x et y, donnons la réalisation expérimentale de la méthode.

DÉTAILS EXPÉRIMENTAUX.

3. *Récipient* A. — Le récipient A était d'abord constitué par une sphère de cuivre d'une seule pièce [1] d'un diamètre intérieur de 30^{mm} et d'un diamètre extérieur d'environ $32^{mm},5$. A l'orifice de cette sphère est soudé à l'or un tube cylindrique de même épaisseur que la sphère et d'environ $11^{mm},5$ de diamètre extérieur soutenant vers le bas un tube cylindrique fermé en haut, terminé en bas par une sorte d'entonnoir et pénétrant d'environ 3^{cm} dans l'intérieur de l'appareil [2]. Dans le prolongement de l'axe

---

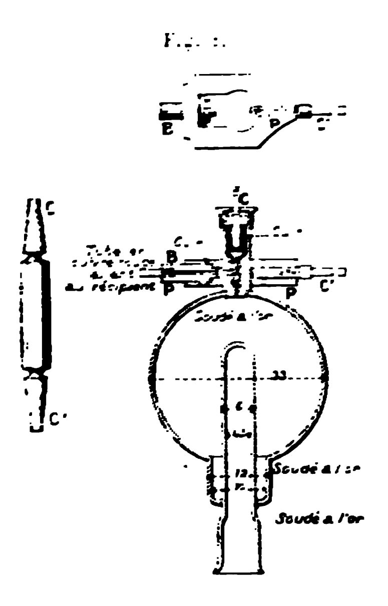
(1) On obtient dans l'industrie des sphères creuses de cuivre, d'une seule pièce et présentant une *ouverture circulaire,* en emboutissant en forme de gobelet un disque de cuivre d'un diamètre et d'une épaisseur convenable, puis mettant deux ou trois cents de ces gobelets dans une sorte de turbine où les chocs répétés dans tous les sens, les uns contre les autres, leur donnent la forme rigoureusement sphérique, l'orifice de la sphère correspondant à l'ouverture du gobelet primitif. Le plus grand diamètre obtenu ainsi est celui que j'emploie.

(2) Ce tube extérieur était destiné à contenir le réservoir d'un thermomètre relié à l'appareil par un bouchon fixé dans l'entonnoir. Je m'étais proposé primitivement, en effet, de déterminer la chaleur spécifique des gaz liquéfiés par la méthode du refroidissement, ce qui explique cette disposition. D'ailleurs, ce tube intérieur était très utile dans les expériences calorimétriques en faisant pénétrer l'eau du calorimètre jusqu'au centre de la sphère. Les gaz liquéfiés étant très mauvais conducteurs de l'électricité (d'après M. Bouty), il doit en résulter, selon toute vraisemblance, qu'ils sont mauvais conducteurs de la chaleur, et l'utilité d'un tube intérieur ne devient plus discutable.

du tube intérieur est fixé un tube cylindrique d'environ 15^{mm} de longueur extérieure et de $4^{mm},5$ de diamètre intérieur, percé dans son axe d'un tube capillaire communiquant avec la sphère. Cette pièce est destinée au remplissage et à l'obturation de l'appareil. La sphère tout entière est dorée pour éviter l'oxydation du cuivre.

L'obturation hermétique est obtenue par une vis d'acier, à tête carrée, du plus petit diamètre possible ($1^{mm},5$), à pas très serré. Cette vis est manœuvrée au moyen d'une véritable clef de montre figurée ci-contre en

Fig. 2.



vraie grandeur, ainsi que la coupe du récipient A et les pièces accessoires.

Le conduit destiné au remplissage est à angle droit sur le premier et s'ouvre latéralement. Un raccord ordinaire de très petite dimension s'engage dans l'ouverture latérale, contre laquelle il presse par l'intermédiaire d'un cuir, et amène le gaz liquéfié au moyen d'un tube capillaire de cuivre. La fixation du raccord sur la sphère s'obtient à l'aide d'une *fermeture d'autoclave* et d'une vis à fond plat dont la tête carrée se manœuvre au moyen de la même clef que le pointeau de la sphère. On peut obtenir ainsi, si l'appareil est bien construit, une fermeture hermétique.

L'emploi d'une clef de montre a pour but de serrer le pointeau avec une grande douceur, pour éviter la déformation trop rapide de l'extrémité conique de la vis qui en est la partie importante et qui doit fonctionner un très grand nombre de fois sans pouvoir être retravaillée. En effet, un des

grands avantages de la méthode exposée ici est, outre sa simplicité théorique, de n'exiger qu'*un seul remplissage* de l'appareil pour la résolution complète du triple problème que je me suis proposé.

Le volume intérieur de la sphère a été déterminé par plusieurs jaugeages à l'eau effectués à la température du laboratoire; on trouve ainsi en moyenne

$$14^{cc},250 \text{ à } 16^{\circ},7.$$

En admettant 0,000050 pour coefficient de dilatation cubique du cuivre entre 0° et 100° (1), il en résulte pour la sphère dorée

$$v_0 = 14^{cc},238, \qquad v_t = v_0(1 + 0,000051).$$

Le poids de la sphère vide, corrigé de la poussée de l'air, a été trouvé égal à

$$36^{gr},3316.$$

Ce récipient, probablement desséché avec soin, a été rempli en deux fois (2) d'acide sulfureux liquide provenant de la société Pictet et qui était parfaitement pur, comme je m'en suis assuré. Il y avait alors $18^{gr},9258$ d'acide sulfureux dans l'appareil, dont le poids total $55^{gr},2574$ s'est conservé rigoureusement pendant près de six mois.

L'avantage théorique consistant à résoudre le problème calorifique des liquides saturés avec un seul récipient A devient illusoire lorsqu'on opère avec de la vapeur saturée dont la densité est petite, ce qui se produit lorsqu'on est suffisamment loin de la température critique. La quantité de chaleur que l'on mesure alors diffère peu de celle que l'on observerait avec l'enveloppe vide; il en résulte que la plus petite erreur sur la capacité calorifique de celle-ci a une influence énorme sur le résultat. Dans ces condi-

---

(1) Ce nombre est la moyenne de ceux qu'on obtient en prenant le triple des coefficients de dilatation linéaires 0,00001678 et 0,00001698 trouvés par M. Fizeau entre 0° et 50°, et du nombre 0,00001666 obtenu par Mathiessen entre 0° et 100°.

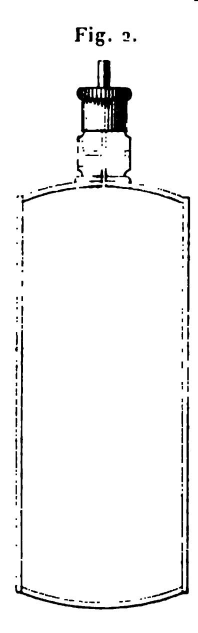
(2) Le remplissage de la sphère A a été effectué à la manière ordinaire en faisant d'abord un vide partiel dans l'ensemble de l'appareil de remplissage, puis des lavages avec le gaz qu'on veut condenser, etc. (*voir* ma Thèse).

Dans le premier remplissage, la bouteille d'acide sulfureux était une bouteille de cuivre renfermant 3^{kg} de liquide, fermée par un robinet de bronze à tête carrée. Celle-ci s'est cassée dans ma main, le robinet étant ouvert: il n'est guère entré que $6^{gr},5$ de gaz dans A. Dans le second remplissage, l'acide sulfureux était renfermé dans une bouteille qui fuyait. L'ouvrier chargé du remplissage de cette bouteille avait essayé de boucher la fissure de la bouteille *avec du suif*. Nous verrons plus loin l'importance de cette remarque.

tions, il vaut mieux perdre l'avantage qui consiste à n'opérer qu'avec un récipient unique et adopter pour l'étude de la chaleur spécifique de la vapeur saturée un récipient plus grand que celui qui sert pour le liquide, de façon à expérimenter sur une masse de vapeur suffisante.

Le second récipient dont je me suis servi a la forme d'un cylindre de même diamètre extérieur que la sphère A et d'une longueur de 7^{cm} environ. Ce cylindre est fermé par deux bases légèrement convexes; la base supérieure porte un robinet à pointeau identique à celui de la sphère A, mais de la grosseur immédiatement supérieure (diamètre $= 2^{mm}$), l'expérience ayant montré que le pointeau de la sphère n'était pas suffisamment

Fig. 2.



résistant (¹). Le cylindre est doré comme la sphère et, comme elle, a été construit par MM. Ducretet et Lejeune. Il est représenté en vraie grandeur par la *fig.* 2.

La moyenne de plusieurs jaugeages à l'eau distillée, dans la glace fondante, a donné

$$v_0 = 43^{cc},4013.$$

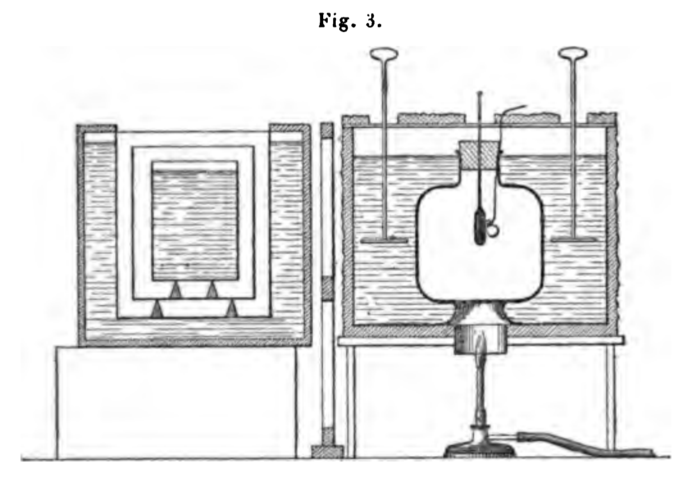
J'ai admis la même loi de dilatation que pour la sphère.

(¹) Il est absolument nécessaire que l'insertion de la pièce cylindrique qui porte le pointeau sur le récipient proprement dit soit fait sans angle rentrant, afin qu'on puisse facilement jauger l'appareil.

Étuve. — Cette partie essentielle de l'appareil a subi des modifications assez nombreuses. Sa première forme correspond aux expériences faites entre 30° et 100° et utilise l'appareil qui devait servir aux expériences de refroidissement.

Une enceinte métallique en cuivre, en forme de bombe, dorée à l'intérieur, est disposée au centre d'un bain d'eau de 7^{lit} environ, protégé contre le refroidissement par des plaques de feutre, de façon à simuler extérieurement un calorimètre Berthelot. La bombe portait à la partie supérieure un

Fig. 3.



col métallique fermé par un bouchon de caoutchouc percé d'un trou qui laisse passer un thermomètre de Baudin au $\frac{1}{10}$ de degré donnant la température de l'air intérieur. La sphère dorée est suspendue, à côté du réservoir du thermomètre, par un fil de soie pressé entre le bouchon de caoutchouc et le col de la bombe. Des agitateurs en forme de croissant, manœuvrés de l'extérieur par des poignées de bois, servent à rendre uniforme la température de l'eau du bain. Le couvercle métallique primitif du bain est, pour plus de simplicité et de commodité, remplacé par une rondelle de carton de 5^{mm} d'épaisseur percée d'ouvertures convenables et surmontée d'une rondelle de feutre de $1^{cm},5$ présentant des ouvertures correspondantes.

Le bain est recouvert de feutre sur sa base inférieure, sauf sur la section d'une sorte de boîte cylindrique de $4^{cm},5$ de haut et de 9^{cm} environ de diamètre. C'est sous cette boîte qu'on place le bec de Bunsen qui sert d'abord à échauffer l'eau du bain, puis à la maintenir à la température constante à laquelle on veut opérer. A cet effet, on obture le bec de Bunsen au moyen d'un couvercle en laiton percé au centre d'un très petit trou donnant avec le gaz privé d'air une petite flamme éclairante; on règle avec précision la

hauteur de celle-ci en manœuvrant le robinet du gaz au moyen d'un levier dont l'extrémité se déplace sur un arc gradué. A la condition de se mettre en garde contre les variations accidentelles de la pression du gaz, il est facile, par l'observation de dix en dix minutes de la température des thermomètres intérieur et extérieur à la bombe, de maintenir constante la température de l'air de l'étuve à 0°,15 près pendant plusieurs heures. Pendant la dernière heure, on s'attache à réduire à moins de 0°,10 la variation de cette température, de façon à connaître exactement la température de la sphère au moment de son immersion dans le calorimètre [1].

A partir de 70°, le bain d'eau est surmonté d'une couche d'huile afin d'empêcher la vaporisation de l'eau [2].

La discussion des inconvénients du dispositif que je viens de décrire a montré qu'il fallait absolument revenir à celui de Regnault, le tube dans lequel on chauffe le corps étudié étant vertical, placé au centre de l'étuve, et le calorimètre pouvant, grâce à un chemin de fer, venir à un moment donné se placer sous l'étuve pour recevoir le corps et s'éloigner aussitôt.

La disposition à laquelle je me suis arrêté et qui m'a servi dans toutes mes expériences ultérieures sur l'acide sulfureux est représentée ci-contre (*fig.* 4). Elle est aisée à comprendre : elle consiste à rendre l'étuve proprement dite indépendante de la table qui lui sert de pied (et, par conséquent, démontable) et à remplacer le bain de vapeur dont se servait Regnault par un bain de glycérine anhydre, qu'on pourra porter à toutes les températures constantes inférieures à 200° ou 220°.

---

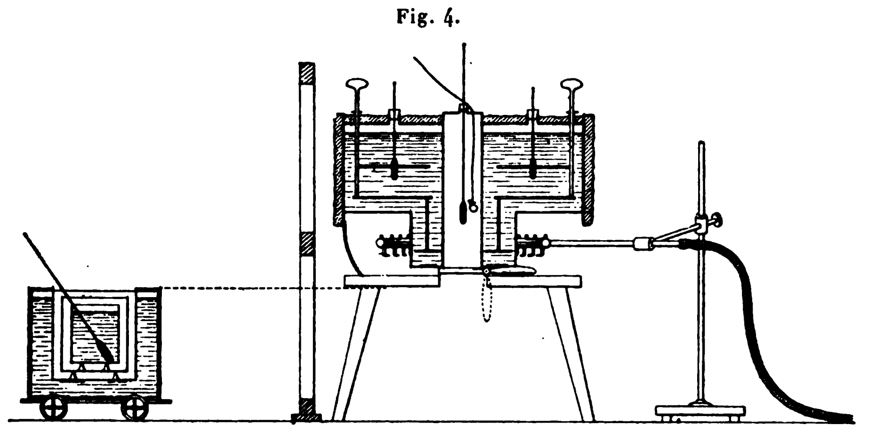
(1) Il est plus simple et plus commode d'assurer la constance de la température à l'aide d'un régulateur automatique, comme je l'ai fait dans mes dernières expériences.

(2) Un inconvénient de ce premier dispositif est qu'on est obligé de faire passer la sphère par le col de la bombe et de lui faire parcourir dans l'air un chemin assez long avant d'arriver au calorimètre, ce qui cause une perte de chaleur. Par des dispositions faciles à imaginer, ce trajet était réduit au minimum.

A cause de cela, dans les expériences faites à 100°, j'ai remplacé la bombe par un tube de cuivre, oblique, fermé à ses deux extrémités et plongeant dans le bain d'eau, disposition adoptée par Regnault pour la chaleur spécifique des liquides à basse température. L'échauffement de la sphère se fait alors par la paroi du tube oblique sur laquelle elle repose; à cause de l'enceinte à double paroi du calorimètre Berthelot, le tube oblique doit sortir notablement du bain pour qu'en glissant la sphère vienne tomber dans l'eau du calorimètre. Il s'ensuit que les parois du tube, bien que protégées contre le rayonnement par des matières mauvaises conductrices et même par un véritable petit bain liquide greffé sur le grand, comme je l'ai fait dans plusieurs de mes essais, sont à une température un peu plus basse au milieu du petit bain qu'au milieu du grand bain. En passant au travers du petit bain, la sphère très conductrice se refroidit nécessairement par contact et l'on trouve des chaleurs spécifiques trop petites.

L'appareil contient 11^{lit} de glycérine. Il est protégé partout, excepté en dessous où il est chauffé, par un feutre de 2^{cm} d'épaisseur. La chaleur est produite par une rampe de gaz annulaire ([1]) chauffant par des becs verticaux

Fig. 4.



le fond supérieur de l'étuve, par des becs inclinés à 45° vers le bas les parois verticales du petit bain entourant le bas du tube central, enfin par des becs recourbés à angle droit le fond inférieur de l'étuve. Avec cette disposition, la soupape même qui ferme le tube central est à une température très voisine de celle des parties intérieures du bain.

La constance de la température du bain liquide et de la température indiquée par le thermomètre du tube central est maintenue soit comme je l'ai indiqué précédemment, soit plutôt à l'aide d'un thermo-régulateur du système Chancel, à vis régulatrice d'acier. Au-dessus de 100°, la variation maxima de la température atteint aisément 0°,3 ou 0°,4 en plusieurs heures.

A cause de la très mauvaise conductibilité de la glycérine et de l'impossibilité d'agiter ([2]), la température n'est pas uniforme dans le tube central. Il faut donc étudier le *champ calorifique*, en se bornant aux points voisins de son axe, afin de connaître la température au niveau du centre du récipient A (sphère ou cylindre), température qu'on admet être celle de ce vase.

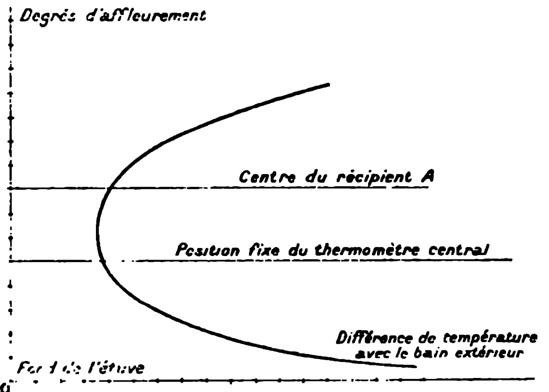
([1]) Il serait évidemment préférable de mettre sur une couronne séparée la première série de becs et de la commander par une prise de gaz indépendante, afin de pouvoir mieux identifier les températures des différentes parties du bain.

L'appareil tout entier a été construit par M. Fauré, de Saint-Cyprien (Toulouse).

([2]) Lorsqu'on agite le bain et que la température est réglée par le thermo-régulateur, es flammes de la couronne de gaz se mettent à vibrer et, étant trop petites, s'éteignent.

A cet effet, on fait affleurer le thermomètre du tube central successivement à différents degrés de son échelle et, après quelques minutes (de trois

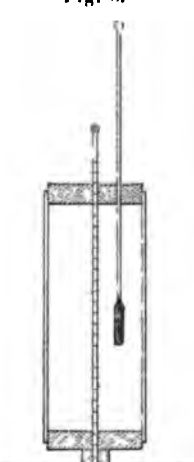
Fig. 5.



à cinq environ), on lit la température, laquelle doit subir la correction du zéro et celle de la tige (1). On déplace ainsi le thermomètre de 2° en 2° à

(1) La méthode d'Is. Pierre, consistant à plonger la tige dans un bain d'eau, n'était pas facile à réaliser dans ce cas particulier. Je me suis contenté de placer la tige du thermomètre central dans l'axe d'un cylindre de verre à parois épaisses fermé par deux bouchons

Fig. 6.



de liège. On isole ainsi autour de la tige une masse d'air dont la température est donnée par un thermomètre de Baudin au $\frac{1}{10}$ de degré. Cette température ne varie que de 1° quand le réservoir du thermomètre parcourt toute la hauteur du cylindre de verre et reste à peu près invariable pendant des heures entières. La température réelle de la tige, dans ces conditions, ne doit pas différer sensiblement de celle de l'air enfermé dans le cylindre de verre.

partir de l'orifice inférieur du tube central, de façon à étudier le champ sur une longueur de 14^{cm}, ce qui correspond sensiblement à 20° de l'échelle du thermomètre employé. On revient à plusieurs reprises et systématiquement aux mêmes affleurements, afin de voir si la température en un même point demeure constante; on note en même temps l'indication du thermomètre placé dans le bain de glycérine et qui est fixe; la différence des deux températures, pour un même point donné, est sensiblement indépendante de la variation de la température du bain.

Si l'on porte en abscisses les différences de températures ainsi obtenues et en ordonnées les degrés d'affleurement du thermomètre central, les points obtenus dessinent une courbe continue qui représente le champ calorifique cherché (voir *fig.* 5). Connaissant le degré d'affleurement qui correspond au centre du récipient A et celui qui correspond à la position fixe du thermomètre central (¹), on lit immédiatement sur la courbe la correction à faire subir à la température finale pour avoir la température moyenne vraie du récipient A au moment de son immersion dans l'eau du calorimètre. Pour plus de simplicité, on plaçait la sphère ou le cylindre à une distance constante de la soupape (le plan tangent inférieur à la sphère ou au cylindre était à 7^{cm} de l'ouverture) et les thermomètres étaient portés par un bouchon enfoncé toujours de la même quantité.

L'ordonnée du centre du récipient A est située légèrement au-dessus de la région où le champ calorifique est constant. Malgré cette circonstance un peu défavorable, je n'ai pas cru devoir mettre le vase plus près de la soupape pour éviter le refroidissement qui aurait pu se produire au moment de l'ouverture de la soupape (²). Dans ces conditions je considère la température du récipient A, toutes corrections faites, comme connue à 0°,2 ou 0°,3 près, ce qui paraîtra suffisant si l'on considère que les expériences ont été poussées jusqu'au voisinage de 160° et que l'abaissement de température, provenant de l'immersion dans le calorimètre, était en moyenne d'une centaine de degrés.

Expérience calorimétrique. — La température du récipient A était

---

(¹) Cette position *fixe* est celle du thermomètre central avant et après l'étude du champ calorifique.

(²) L'emploi de deux couronnes de becs de gaz, indépendantes l'une de l'autre, aurait permis de faire en sorte que le récipient A fût dans la région constante du champ, ce qui eût été préférable.

maintenue constante pendant trois ou quatre heures au moins. Pendant ce temps, la température de la salle calorimétrique s'élevait légèrement. L'eau devant servir à l'expérience était versée dans le flacon jaugé environ une heure avant l'immersion du récipient et le flacon abandonné à lui-même afin d'achever de prendre la température du laboratoire, que l'eau ne prenait qu'avec une plus grande lenteur dans la fontaine calorimétrique. Au bout de trente à trente-cinq minutes, on versait l'eau dans un calorimètre Berthelot et l'on observait pendant quinze à vingt minutes la marche du thermomètre calorimétrique, qui était la plupart du temps inférieure à 0°,010. La température initiale était donc bien connue.

Rapidement on enlevait l'écran, on éteignait (ou non) le gaz, on poussait le calorimètre sous l'étuve, on ouvrait la soupape, on laissait tomber le récipient, on coupait le fil, on refermait la soupape et l'on ramenait le calorimètre en interposant de nouveau l'écran. Toutes ces manœuvres prenaient environ quinze à vingt secondes pendant lesquelles le calorimètre était exposé au rayonnement de l'étuve par les ouvertures nécessaires au jeu de la soupape et au passage de la partie supérieure de l'agitateur du calorimètre; d'où la nécessité d'une correction.

Pendant dix minutes on observait la marche du thermomètre calorimétrique (maximum et refroidissement ultérieur) après avoir eu soin, dès le commencement, de rallumer le gaz éteint. Puis on ramenait le calorimètre sous l'étuve et on l'y laissait deux minutes (après avoir eu soin d'éteindre ou non le gaz), enfin on notait le refroidissement du thermomètre, d'où il était facile de conclure l'élévation de la température du calorimètre pendant la station de deux minutes sous l'étuve. Une simple proportion donnait alors la correction initiale portant sur une durée environ 6 ou 8 fois moindre.

Pendant l'observation du refroidissement final, le thermomètre, resté dans le tube central de l'étuve toujours sensiblement à la même température (le refroidissement de l'étuve pendant les diverses extinctions du gaz étant très faible), était porté dans la glace fondante, après une période de refroidissement ne dépassant pas une minute et demie, de façon à observer son zéro déprimé, la température constante de l'étuve correspondant au même degré de trempe du réservoir.

Les quantités de chaleur ainsi mesurées ont varié depuis 215^{Cal} jusqu'à 2885^{Cal}; afin d'avoir toujours des élévations de température comprises entre 1° et 2° on a dû employer successivement des calorimètres de 200^{cc},

400^{cc}, 600^{cc} et 1000^{cc}. Les deux premiers étaient en laiton mince doré intérieurement et extérieurement; ceux de 600^{cc} et 1000^{cc} étaient en platine.

Chaleur spécifique du récipient A *vide*. — Pour le calcul des expériences il faut connaître avec exactitude la valeur en eau de l'enveloppe vide, laquelle entre pour une part très importante dans les quantités de chaleur mesurées. A cet effet, à la fin des expériences sur la chaleur spécifique de la vapeur saturée, on vide complètement la sphère et le cylindre et l'on répète avec le vase vide les mêmes expériences calorimétriques qu'avec le vase plein. Comme la chaleur spécifique des métaux varie assez peu avec la température et que la valeur en eau de la sphère n'était guère que de 3^{gr}, il était malaisé de faire des mesures calorimétriques suffisamment précises pour observer sur la sphère la variation avec la température de sa capacité calorifique. Un autre élément de complication est le suivant.

Au commencement des expériences sur la vapeur saturée, le pointeau en acier de la sphère s'est cassé, l'appareil étant fermé. Il a fallu enlever la presque totalité de l'écrou pour aller retrouver le bout de vis restant dont on a retaillé la partie supérieure de façon qu'on pût toujours manœuvrer la vis avec la même clef. La fermeture de la sphère était encore absolue bien que le pointeau ne possédât plus que la longueur de 3 ou 4 pas de vis. Dès lors il fallait connaître la valeur en eau de la sphère dans les deux états.

Les premières mesures donnèrent des résultats peu concordants, et surtout une valeur en eau notablement plus grande que celle que l'on pouvait calculer d'après le poids de l'appareil et une valeur moyenne de la chaleur spécifique du cuivre. La raison n'en fut trouvée que lorsque, après avoir inutilement répété des lavages à l'eau distillée pure ou alcoolisée, j'eus l'idée de laver l'appareil à l'*éther pur*. Je vis que ce corps dissolvait une matière blanche, onctueuse; je parvins à extraire cette matière et à l'isoler par évaporation du dissolvant. Elle fut reconnue être du suif par M. le professeur Destrem, que je prie, à cette occasion, d'agréer mes plus affectueux remercîments. Lorsque, malgré des lavages réitérés, le poids de la sphère fut devenu constant, je retrouvai le poids primitif, correction faite de la perte de matière subie antérieurement (¹). La présence du suif ne peut

(¹) La sphère vide présentait d'abord sur son poids primitif, corrigé de la quantité de matière enlevée lors de l'accident de la vis, un excès de poids d'environ $0^{gr},220$. J'ai commencé par attribuer cette augmentation de poids à une oxydation intérieure du vase; ayant ensuite retrouvé le poids primitif, il s'ensuit qu'il n'y a pas eu d'attaque sensible du vase par l'acide sulfureux.

vraisemblablement être attribuée qu'à la cause accidentelle que j'ai signalée au cours de ce Mémoire, p. 13, note ([2]).

La sphère ainsi nettoyée donna des résultats calorimétriques concordants rapportés dans ce Tableau :

Dates.	Intervalle de températures.	Valeur en eau.
28 novembre 1894	13°,28 à 151°,20	3gr,2754
3 décembre 1894	10,81 à 149,85	3,2908
18 »	10,79 à 99,60	3,2919
	Moyenne	3,286

La chaleur spécifique de la matière moyenne du vase était donc

$$\frac{3,286}{34,866} = 0,094246.$$

Avant son accident, la sphère vide pesait 36gr,3316; la matière moyenne étant sensiblement la même qu'actuellement, la valeur en eau était donc

$$0,094246 \times 36^{gr},3316 = 3^{gr},4241.$$

Aux nombres précédents il fallait ajouter la valeur en eau de 0gr,220 de suif ([1]). Or je n'ai pu trouver aucune détermination de la chaleur spécifique de cette substance; par suite, j'ai dû la mesurer directement.

A cet effet, je me suis servi de la bouteille de platine, utilisée généralement pour la chaleur spécifique des liquides (méthode de M. Berthelot), que j'ai bouchée avec un chapeau de clinquant fermant à frottement doux et dans laquelle j'ai mis de 10gr à 17gr de suif de chandelle. La première mesure a été faite à la manière ordinaire; dans les deux dernières j'ai calculé le refroidissement par la méthode de Pfaundler. Voici les résultats obtenus :

Date.	Poids du suif expérimenté.	Intervalle de températures.	Chaleur spécifique moyenne du suif.
4 décembre 1894	10gr,805	11°,40 à 150°,90	0,609
11 »	17,743	11,20 à 126,50	0,606
12 »	17,743	10,61 à 100,95	0,632

Le dernier résultat est plus fort que les autres parce que l'expérience a

([1]) L'origine de ce nombre est donnée dans la note précédente.

été troublée par l'entrée d'une grande quantité d'eau dans la bouteille de platine; or on sait qu'au contact de deux liquides il se produit généralement un phénomène thermique : ici c'est un dégagement de chaleur qui augmente la chaleur spécifique. Dans les deux premières expériences, la quantité d'eau rentrée était très petite. On tiendra compte de la perturbation apportée par l'eau en admettant pour chaleur spécifique moyenne du suif (1) le nombre

$$0,600,$$

ce qui, pour les $0^{gr},220$ de suif, donne une valeur en eau de $0^{gr},132$.

On tiendra donc compte du suif au point de vue calorifique en admettant pour valeur en eau de la sphère

Avant l'accident	$3^{gr},424 + 0^{gr},132 = 3^{gr},556$
Après l'accident	$3^{gr},286 + 0^{gr},132 = 3^{gr},418$.

La valeur en eau du cylindre a été donnée par huit expériences dont voici les résultats :

Date.	Intervalle de températures.	Valeur en eau.
11 décembre 1895	$13°,7$ à $149°,5$	$13^{gr},62$
12 »	14,5 à 152,6	13,37
13 »	14,8 à 151,3	13,47
14 »	14,5 à 137,65	13,45
18 »	12,7 à 120,7	13,65
20 »	11,5 à 97,6	13,42
21 »	10,9 à 100,0	13,48
31 »	11,0 à 81,6	13,45

Si l'on ne tient pas compte de l'expérience du 12 décembre 1895, qui donne un résultat visiblement trop faible, on voit que les sept expériences restantes peuvent former deux groupes correspondant chacun à une expérience moyenne. On trouve ainsi que la valeur en eau du cylindre est

$13^{gr},55$ entre 14° et 140°
$13^{gr},45$ entre 11° et 90°.

On obtient ainsi une variation de la chaleur spécifique avec la tempéra-

(1) Je confonds à dessein, dans le même nombre moyen, la capacité calorifique du suif à l'état solide et à l'état liquide, augmentée de la chaleur de fusion.

ture tout à fait analogue à celle que Landolt donne, d'après Bède, pour le cuivre ([1]).

Pratiquement, on peut calculer le poids en eau du cylindre entre la température ambiante moyenne (15°) et t par la formule

$$M = 13^{gr},2\,(1 + 0,0002\,t).$$

Conséquences de la présence du suif dans la sphère. — Il y a lieu de considérer séparément les expériences faites sur le liquide saturé et celles qui se rapportent à la vapeur saturée.

Dans le premier cas, la quantité de vapeur est tout à fait négligeable devant le poids du liquide et il n'y a pas lieu de tenir compte de la solubilité de la vapeur d'acide sulfureux dans le suif liquide ([2]). A la condition de négliger la compressibilité du suif, on peut dire qu'il a pour seule conséquence, outre l'augmentation de la valeur en eau de l'enveloppe ([3]), de diminuer le volume intérieur du récipient A d'une quantité égale à son propre volume, ce qui exige la connaissance du poids spécifique du suif aux différentes températures.

Le cas des expériences faites sur la vapeur saturée est plus embarrassant parce qu'on ignore complètement l'ordre de grandeur du coefficient de solubilité de la vapeur saturée d'acide sulfureux dans le suif liquide. Comme le suif retiré de la sphère, après un contact prolongé avec l'acide sulfureux alternant avec des chauffages à température élevée, est resté malgré cela inaltéré, on peut en conclure qu'il n'y a entre 0° et 160° aucune réaction chimique entre l'acide sulfureux et le suif et que, vraisemblablement, le coefficient de solubilité de l'acide gazeux dans le suif liquide est très faible. Dans le doute, j'ai supposé ce coefficient de solubilité égal à zéro et j'ai négligé, par suite, la chaleur de dissolution du gaz dans le suif liquide.

Dans les expériences faites sur le liquide, le poids du suif est toujours resté une très petite fraction du poids total de l'acide sulfureux (lequel a varié de $18^{gr},7$ à $8^{gr},6$).

([1]) Le cylindre pesant $144^{gr},29$ environ, sa chaleur spécifique moyenne entre 11° et 13° est, d'après ce qui précède, 0,09322. Bède indique 0,09331 entre 15° et 100°. La concordance serait aussi parfaite en prenant l'expérience moyenne relative à l'intervalle 14°-140°.

([2]) Lequel surnage l'acide sulfureux liquide jusque vers + 143°. Au-dessus, le suif liquide étant plus lourd tombe au fond, et il n'y a pas contact entre le gaz et le suif.

([3]) On néglige aussi le phénomène thermique qui se produit au contact des deux liquides et sur lequel on n'a aucune donnée. Il est simplement probable qu'il est petit.

Il est donc probable que les erreurs résiduelles qui affectent mes nombres définitifs sont faibles (¹).

Dans les expériences portant sur la vapeur saturée, le poids du suif, à mesure qu'on s'éloigne de la température critique, devient comparable à celui de la vapeur et tout à fait du même ordre de grandeur. Dans ces conditions, les corrections faites sont insuffisantes et les résultats sont incertains.

C'est pour cette raison que j'ai tenu à faire, à l'aide du cylindre décrit plus haut, une série de mesures très soignées, portant sur un acide sulfureux dont j'ai directement vérifié la pureté et ne contenant aucun corps étranger solide.

Densité du suif. — D'après M. Arnavon (²), la densité du suif animal est 0,918 à + 15°. Je n'ai pu trouver aucune indication sur la variation de cette quantité avec la température. Comme c'est l'élément essentiel de la correction à effectuer, j'ai pris par la méthode ordinaire du flacon la densité du suif liquide (³) à des températures voisines de 100°, 120°, 140°, 160°. Bien que tous les suifs de provenance différente ne sont pas absolument identiques, comme il s'agit ici d'une correction petite en soi, je n'ai pas cru nécessaire d'étudier plus d'un échantillon de cette matière. Voici les nombres trouvés, auquel je joins le nombre de M. Arnavon :

t.	Densité observée.	Densité calculée.
15°	0,9180	0,9180
98,9	0,8648	0,8650
120	0,8514	0,8514
140	0,8379	0,8382
160	0,8249	0,8250

Les nombres expérimentaux sont bien représentés par la formule

$$\delta = 0,92721 - 0,0006115\,t - 0,000000171\,t^2.$$

(¹) On le verra plus loin en comparant les nombres corrigés du suif et ceux qui ne le sont pas.

(²) *Agenda du Chimiste*, pour 1893, p. 359.

(³) Suif de chandelle du commerce.

CALCUL DES EXPÉRIENCES ET RÉSULTATS.

4. Le calcul des expériences exige la connaissance de la chaleur de vaporisation interne à la température ambiante ρ_0 et des intégrales $\int p\,du$ et $\int p\,du'$.

Or, dans mes expériences antérieures, j'ai mesuré la chaleur de vaporisation de l'acide sulfureux à la température ordinaire, et j'en ai déduit, par le calcul, la chaleur de vaporisation interne. Les nombres ρ_0 seront obtenus en interpolant les valeurs de ρ données p. 53 de ma Thèse.

Le calcul des intégrales exige la connaissance de p en fonction de la température; M. J. Bertrand, d'une part, M. Cailletet et moi, de l'autre, avons eu l'occasion de constater la divergence des mesures de Regnault et de celles de Sajotchewski [1]. M. J. Bertrand a donné dans sa *Thermodynamique* deux formules pour représenter leurs résultats expérimentaux : une première formule (a) représentant très bien les expériences de Regnault entre $-30°$ et $+65°$, et en désaccord avec les mesures de Sajotchewski; une seconde formule (b) représentant moins bien les expériences de Regnault, mais beaucoup mieux celles de Sajotchewski. J'ai utilisé les deux formules de M. Bertrand, les volumes spécifiques du liquide et de la vapeur saturée de l'acide sulfureux étant tirés du travail que M. Cailletet et moi avons fait sur ce sujet [2].

Les intégrales ont été calculées de 10° en 10° en admettant pour p la moyenne des valeurs correspondant aux extrémités de l'intervalle, la température la plus basse étant 0°. Les calculs ont été faits en unités C.G.S., puis les nombres divisés par $4,17.10^7$ pour avoir l'équivalent calorifique des travaux extérieurs considérés, c'est-à-dire

$$\frac{1}{E}\int p\,du \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{E}\int p\,du'.$$

On passe de là, par des additions, aux intégrales $\frac{1}{E}\int_0^t p\,du$ et $\frac{1}{E}\int_0^t p\,du'$ où t est un multiple de 10°. Je donne à titre de renseignement le calcul de la seconde intégrale fait au moyen des formules (a) et (b) de M. Bertrand.

(1) CAILLETET et MATHIAS, *Journ. de Phys.*, 1887.
(2) *Ibid.*

Pour la première intégrale, dont la valeur absolue est généralement très petite, l'intérêt est moindre et je donne seulement la moyenne des résultats fournis par les deux formules.

Valeurs de $\frac{1}{E}\int_0^t p\,du'$.

t.	Par la formule (*a*).	Par la formule (*b*).
o	Cal	Cal
10	— 3,147	— 3,101
20	6,197	6,107
30	8,917	8,791
40	11,623	11,468
50	14,024	13,851
60	16,221	16,040
70	18,084	17,903
80	19,972	19,800
90	22,004	21,852
100	24,042	23,920
110	26,047	26,174
120	28,023	28,200
130	29,971	30,209
140	32,012	32,323
150	34,017	34,413
156	36,285	36,786

Valeurs de $\frac{1}{E}\int_{10}^t p\,du$.

t.	Moyenne des résultats donnés par les 2 formules.
o	Cal
20	+ 0,00093
30	0,00235
40	0,00581
50	0,01229
60	0,02333
70	0,04065
80	0,06672
90	0,10587
100	0,16453
110	0,2516
120	0,3804
130	0,5766
140	0,8973
150	1,485
156	3,109

Ces nombres ont servi à construire des courbes graphiques dont les ordonnées étaient les valeurs absolues des intégrales et dont les abscisses étaient les températures t.

Ces courbes ont été utilisées pour le calcul de toutes les expériences faites sur l'acide sulfureux. La chaleur spécifique de vapeur saturée étant, comme je l'ai montré, expérimentalement indépendante de la chaleur spécifique du liquide, c'est celle qu'il faut commencer par calculer.

Il a été fait ainsi, avec la sphère dorée, 14 expériences dont le calcul détaillé est rapporté dans les Tableaux suivants ([1]). On remarquera que l'expérience du 7 août 1894, faite avec un poids de vapeur par trop faible, donne des résultats tout à fait inacceptables; il en est de même, à un moindre degré, pour l'expérience du 2 août.

([1]) La chaleur spécifique z de la vapeur surchauffée peut se déterminer directement sur le récipient A lui-même en donnant à ε deux valeurs très différentes, mais z est mal déterminé. La chaleur spécifique du gaz sulfureux étant, d'après Regnault, 0,1544 sous la pression atmosphérique, j'ai admis $z = 0,20$.

Vapeur saturée de l'acide sulfureux.

DATE.	P.	$t+\varepsilon$	θ.	t.	ε.	VOLUME DU SUIF à $t+\varepsilon$.	VOLUME DU SUIF à θ.	VOLUME UTILE à $t+\varepsilon$.	VOLUME UTILE à θ.	π.	$P-\pi$.
	gr	o	o	o	o	cc	cc	cc	cc	gr	gr
6 juin 1894..	7,3002	155,97	23,406	155,95	+ 0,02	0,2664	0,2426	14,4686	14,4061	7,2032	0,0970
11 » ..	7,2963	160,15	21,825	155,94	4,21	»	0,2424	»	14,4222	7,2045	0,0918
12 » ..	6,4327	155,95	21,804	155,50	0,45	»	0,2424	»	14,3422	6,3354	0,0973
13 » ..	Id.	156,58	21,618	155,50	1,08	»	0,2424	»	14,4123	6,3346	0,0981
25 » ..	5,3538	155,75	23,926	154,00	1,75	0,2662	0,2426	14,4763	14,4135	5,2405	0,1133
26 » ..	4,7589	152,30	25,123	151,82	0,48	0,2655	0,2428	14,4735	14,4142	4,6366	0,1223
27 » ..	4,1506	151,60	26,031	148,30	3,30	0,2652	0,2430	14,4733	14,4146	4,0176	0,1330
13 juillet ..	3,6389	145,53	25,928	144,50	1,03	0,2639	0,2430	14,4702	14,4146	3,5014	0,1375
25 » ..	2,9725	139,90	24,361	138,20	1,70	0,2626	0,2428	14,4673	14,4137	3,8393	0,1332
27 » ..	2,2354	130,60	25,026	128,60	2,00	0,2607	0,2428	14,4625	14,4141	2,0924	0,1430
31 » ..	1,8596	124,60	25,096	121,50	3,10	0,2593	0,2430	14,4595	14,4140	1,7135	0,1461
1 août ..	1,1950	107,50	24,841	103,35	4,15	0,2560	0,2428	14,4503	14,4140	1,0448	0,1502
2 » ..	0,9570	100,30	24,835	93,90	6,40	0,2546	0,2428	14,4464	14,4140	0,8049	0,1521
7 » ..	0,4673	75,20	23,501	61,80	13,40	0,2503	0,2426	14,4324	14,4132	0,3170	0,1503

SUITE DU TABLEAU.

Date.	q.	Q.	$\pi\rho_\theta$.	$P\frac{1}{E}\int_\theta^t p\,du'$	y_θ^t.	y_{20}^θ.	y_{20}^t.
	Cal	Cal	Cal	Cal	Cal	Cal	Cal
6 juin 1894..	907,39	435,96	542,31	—213,17	—43,77	— 0,62	—44,39
11 » ..	957,90	459,87	545,24	—216,35	—41,35	— 0,62	—41,97
12 » ..	887,57	409,97	479,46	—189,765	—40,30	— 0,61	—40,91
13 » ..	896,27	414,955	479,85	—189,765	—39,59	— 0,55	—40,14
25 » ..	798,45	346,00	392,85	—156,98	—37,00	— 1,33	—38,33
26 » ..	747,88	312,73	345,66	—129,44	—34,12	— 1,72	—35,84
27 » ..	711,93	279,99	297,945	—107,92	—30,32	— 2,02	—32,34
13 juillet ..	654,65	245,10	259,77	— 91,955	—29,30	— 1,99	—31,29
25 » ..	598,94	203,02	212,59	— 72,59	—27,64	— 1,47	—29,11
27 » ..	508,30	146,55	156,07	— 49,45	—26,38	— 1,69	—28,07
31 » ..	456,135	114,88	127,76	— 38,55	—27,66	— 1,72	—29,38
1 août ..	354,25	70,735	78,01	— 20,48	—23,23	— 1,63	—24,86
2 » ..	309,24	50,08	60,10	— 14,59	—25,72	— 1,63	—27,35
7 » ..	189,45	11,49	23,85	— 4,32	—37,70	»	»

Portons en ordonnées les nombres y'_{20} ainsi trouvés et en abscisses les températures, et remarquons que la chaleur spécifique m' de la vapeur saturée est le coefficient angulaire $\frac{dy}{dt}$ de la courbe ainsi obtenue. On trouve ainsi :

1° Que la courbe admet pour la température critique une tangente parallèle à l'axe des ordonnées, la valeur des ordonnées étant voisine de $-44^{\text{Cal}},5$; il en résulte que la chaleur spécifique de vapeur saturée tend bien vers $-\infty$ lorsque la température tend vers sa valeur critique;

2° Que la courbe présente un maximum relatif vers 132°; c'est le *deuxième point d'inversion* annoncé dans ma Thèse;

3° Qu'il y a un minimum moins bien déterminé vers 116° correspondant au *premier point d'inversion*, ce minimum étant séparé du maximum par un point d'inflexion situé vers 124° et qui correspond au maximum de la chaleur spécifique de vapeur saturée.

L'expérience confirme donc d'une façon complète les prévisions de la théorie.

Toutefois, je me propose d'établir dans ce qui suit que, si les valeurs de y'_{20} trouvées avec l'acide sulfureux souillé d'une petite quantité de suif sont bonnes *qualitativement* et mettent bien en évidence les lois relatives à la chaleur spécifique de vapeur saturée, les valeurs absolues sont absolument inacceptables, ce qui confirme mes prévisions (*voir* p. 25).

A cet effet, nous utiliserons les valeurs ainsi trouvées et la courbe qui les représente pour le calcul des quantités x, dont le détail est rapporté dans les Tableaux suivants :

Acide sulfureux liquide.

DATE.	P.	t.	θ.	VOLUME DU SUIF à t.	VOLUME DU SUIF à θ.	VOLUME UTILE à t.	VOLUME UTILE à θ.	π.	$P-\pi$.
	gr	°	°	cc	cc	cc	cc	gr	gr
5 décembre 1893.	18,7058	32,33	9,630	0,2438	0,2408	14,0172	14,0040	18,7039	0,0019
6 »	Id.	32,88	9,610	Id.	Id.	14,0176	14,0040	18,7048	0,0010
8 »	Id.	32,46	9,082	Id.	0,2407	14,0173	14,0037	18,7043	0,0015
13 »	Id.	32,34	9,743	Id.	0,2408	14,0172	14,0041	18,7039	0,0019
18 »	18,4984	42,81	11,168	0,2452	0,2410	14,0233	14,0049	18,4990	» (¹)
19 »	Id.	42,36	11,188	Id.	Id.	14,0230	14,0051	18,4992	»
20 »	18,1393	50,48	11,895	0,2464	0,2411	14,0276	14,0053	18,1400	»
26 »	Id.	50,29	11,806	0,2463	Id.	14,0275	14,0053	18,1398	»
27 »	17,6763	60,35	11,899	0,2479	Id.	14,0331	14,0053	17,6767	»
29 »	Id.	60,42	9,668	Id.	0,2408	14,0331	14,0040	Id.	»
15 janvier 1894.	17,1730	70,23	10,186	0,2494	0,2409	14,0366	14,0023	17,1718	0,0012
16 »	Id.	70,46	10,470	0,2495	Id.	14,0366	14,0025	17,1721	0,0009
17 »	16,7371	80,55	11,126	0,2512	0,2410	14,0422	14,0029	16,7377	»
22 »	Id.	80,38	11,364	0,2511	Id.	14,0421	14,0030	16,7373	»
23 »	16,2092	90,75	11,266	0,2529	Id.	14,0477	14,0030	16,2104	»
24 »	Id.	90,70	11,430	Id.	Id.	14,0477	14,0030	16,2102	»
28 février	15,5232	99,80	12,401	0,2546	0,2411	14,0525	14,0037	15,5135	0,0097
12 mars	14,9250	109,06	13,602	0,2563	0,2413	14,0572	14,0044	14,9082	0,0168
23 avril	14,9207	110,00	15,545	0,2565	0,2415	14,0578	14,0055	14,9094	0,0113
25 »	13,9520	124,10	16,528	0,2593	0,2417	14,0650	14,0061	13,9445	0,0075
1 mai	13,9453	123,70	16,785	Id.	Id.	14,0648	14,0062	13,9316	0,0137
2 »	13,3197	131,15	17,420	0,2608	0,2418	14,0685	14,0066	13,3125	0,0072
7 »	Id.	131,00	17,387	Id.	Id.	14,0684	14,0066	13,3090	0,0107
8 »	12,4361	139,10	18,317	0,2625	0,2419	14,4518	14,3841	12,3279	0,1082
9 »	12,4338	139,35	18,741	0,2626	Id.	14,5374	14,4580	12,3106	0,1232
14 »	11,7223	145,10	18,679	0,2639	Id.	14,4524	14,3851	11,6455	0,0768
15 »	11,7213	145,25	19,531	Id.	0,2421	14,4524	14,3856	11,6548	0,0665
28 »	10,6582	150,55	17,563	0,2651	0,2418	14,4550	14,3818	10,5288	0,1294
29 »	Id.	150,40	17,904	Id.	Id.	14,4549	14,3819	10,5063	0,1519
31 »	9,6357	153,85	18,430	0,2659	0,2419	14,4676	14,3932	9,3924	0,2433
4 juin	Id.	153,75	20,770	Id.	0,2422	14,4776	14,4046	9,2886	0,3471
5 »	8,6130	155,50	22,057	0,2662	0,2424	14,4784	14,4053	8,4100	0,2030

(¹) Les guillemets de cette colonne correspondent à des poids π de liquide *plus grands* que le poids total P, ce qui indiquerait que l'on a affaire, non plus à un liquide saturé, mais à un liquide *comprimé*. La plus grande différence observée étant de 1^{mgr} sur un poids total de $16^{gr},2$ peut être attribuée à une très légère incertitude sur la densité du liquide.

Acide sulfureux liquide (suite).

DATE.		π'.	$P-\pi'$.	$\pi'-\pi$.	q.	M.	Q.	$(\pi'-\pi)\rho_1$	$(P-\pi)\rho'_1$
		gr	gr	gr	Cal	gr	Cal	Cal	Cal
5 décembre 1893	....	18,7012	0,0046	−0,0027	215,62	3,556	134,90	— 0,215	— 0,015
6 »	....	Id.	Id.	0,0036	221,83	Id.	139,08	0,287	0,008
8 »	....	18,7009	0,0049	0,0034	227,54	Id.	144,40	0,272	0,012
13 »	....	18,7013	0,0045	0,0026	215,27	Id.	134,90	0,207	0,015
18 »	....	18,4925	0,0059	0,0059	302,32	Id.	189,80	0,467	»
19 »	....	Id.	Id.	Id.	299,84	Id.	188,99	0,467	»
20 »	....	18,1314	0,0079	0,0079	370,06	Id.	232,83	0,623	»
26 »	....	Id.	Id.	Id.	368,04	Id.	231,21	0,623	»
27 »	....	17,6661	0,0102	0,0102	457,78	Id.	285,49	0,805	»
29 »	....	17,6664	0,0099	0,0099	478,35	Id.	297,88	0,790	»
15 janvier 1894	....	17,1611	0,0119	0,0107	562,99	Id.	349,49	0,851	— 0,023
16 »	....	17,1610	0,0120	0,0111	561,52	Id.	348,20	0,882	0,017
17 »	....	16,7229	0,0142	0,0142	652,87	Id.	406,00	1,124	»
22 »	....	16,7231	0,0140	0,0140	642,90	Id.	397,48	1,107	»
23 »	....	16,1934	0,0158	0,0158	736,52	Id.	453,88	1,250	»
24 »	....	16,1936	0,0156	0,0156	731,08	Id.	449,20	0,233	»
28 février	....	15,5021	0,0211	0,0114	792,11	Id.	481,32	0,897	— 0,301
12 mars	....	14,9000	0,0250	0,0082	849,32	Id.	509,87	0,641	0,580
23 avril	....	14,8939	0,0268	0,0155	851,80	Id.	515,92	1,201	0,386
25 »	....	13,9193	0,0327	0,0252	936,51	Id.	553,98	1,943	0,249
1 mai	....	13,9118	0,0335	0,0198	935,30	Id.	555,11	1,525	0,457
2 »	....	13,2815	0,0382	0,0310	979,11	Id.	574,69	2,380	0,229
7 »	....	Id.	Id.	—0,0275	976,39	Id.	572,38	— 2,112	0,330
8 »	....	12,3872	0,0489	+0,0593	1010,52	Id.	581,02	+ 4,534	3,511
9 »	....	12,3837	0,0501	0,0731	1005,39	Id.	576,50	5,577	4,003
14 »	....	11,6682	0,0541	0,0227	1037,17	Id.	587,62	1,732	2,629
15 »	....	11,6655	0,0558	0,0107	1027,74	Id.	580,68	0,813	2,263
28 »	....	10,5996	0,0586	0,0708	1052,46	Id.	579,56	5,436	4,843
29 »	....	10,5983	0,0599	0,0920	1046,57	Id.	575,41	7,048	5,638
31 »	....	9,5684	0,0673	0,1760	1031,55	Id.	550,00	13,449	9,703
4 juin	....	9,5648	0,0709	0,2762	1007,48	Id.	534,60	20,865	13,491
5 »	....	8,5310	0,0820	+0,1210	958,85	Id.	485,39	+ 9,083	8,372

Acide sulfureux liquide (suite).

DATE.	$\frac{\pi}{E}\int_\theta^t pdu.$	$\frac{(P-\pi)}{E}\int_\theta^t pdu'$	$x_\theta^t.$	EXPÉRIENCE moyenne de θ'.	EXPÉRIENCE moyenne à t'.	$x_{\theta'}^{t'}.$	$x_{-10}^{\theta'}.$	$x_{-10}^{t'}.$
	Cal	Cal	Cal	o	o	Cal	Cal	Cal
5 décembre 1893.	+ 0,057	— 0,012	+ 7,227	9,60	32,54	7,42	9,41	16,83
6 »	Id.	0,007	7,454					
8 »	Id.	0,010	7,739					
13 »	Id.	0,012	7,227					
18 »	0,134	»	10,292	11,20	42,60	10,27	9,915	20,18
19 »	Id.	»	10,249					
20 »	0,228	»	12,882	11,85	50,38	12,84	10,12	22,96
26 »	Id.	»	12,793					
27 »	0,419	»	16,220	10,80	60,40	16,57	9,79	26,36
29 »	0,423	»	16,920					
15 janvier 1894.	0,705	0,018	20,443	10,32	70,34	20,41	9,63	30,04
16 »	0,714	0,011	20,374					
17 »	1,145	»	24,393	11,25	80,46	24,14	9,93	34,07
22 »	1,136	»	23,882					
23 »	1,774	»	28,188	11,35	90,72	28,04	9,96	38,00
24 »	1,659	»	27,891					
28 février	2,526	0,196	31,253	12,40	99,80	31,25	10,32	41,57
12 mars	3,595	0,366	34,499	14,57	109,53	34,72	11,00	45,72
23 avril	3,744	0,238	34,945					
25 »	6,417	0,179	40,332	16,55	123,91	40,37	11,68	52,05
1 mai	6,303	0,325	40,417					
2 »	8,062	0,180	43,957	17,40	131,10	43,86	12,38	56,24
7 »	8,006	0,267	43,772					
8 »	10,560	2,862	47,672	18,52	139,20	47,49	12,40	59,89
9 »	10,673	3,250	47,305					
14 »	13,930	2,115	51,550	19,10	145,15	51,27	12,54	63,81
15 »	14,044	1,815	50,997					
28 »	16,428	3,763	56,192	17,78	150,47	55,97	12,10	68,07
29 »	16,175	4,394	55,755					
31 »	19,724	7,268	59,485	19,60	153,80	58,62	12,70	71,32
4 juin	19,274	10,090	57,749					
5 »	22,707	5,965	59,622	22,06	155,50	59,62	13,50	73,12

Portons en ordonnées les nombres x'_{-20} ainsi trouvés et en abscisses les températures; nous obtenons une courbe dont le coefficient angulaire, *positif*, augmente constamment et indéfiniment, la courbe admettant pour la température critique une tangente parallèle à l'axe des ordonnées. Les prévisions de la théorie sont encore justifiées, et l'on n'aperçoit pas en quoi les valeurs précédemment trouvées pour y'_{20} ne sont pas acceptables. Il est nécessaire, pour le voir, d'utiliser la *deuxième transformation auxiliaire* qui permet le calcul de la chaleur de vaporisation interne ρ_t à la température initiale du récipient A, connaissant les quantités x et y.

Nous n'avons pas tenu compte, en effet, de la chaleur de dissolution de l'acide sulfureux gazeux dans le suif liquide. Lorsque le récipient A se refroidit dans l'eau du calorimètre, la pression du gaz diminue considérablement, et la presque totalité du gaz dissous se dégage *en absorbant de la chaleur* (¹); la quantité q de chaleur mesurée, et par suite Q, est donc trop petite. Par suite, la formule (3) (p. 9) fournit pour y'_t *un nombre trop grand en valeur absolue.*

Dans le calcul de x'_t par la formule (2) (p. 7), le terme correctif du second membre $-(P-\pi)y'_t$ est trop grand; mais son influence est petite parce que le poids $P-\pi$ de la vapeur saturée est très faible en général, ainsi que le veut la méthode décrite. On doit donc s'attendre à ce que les valeurs de x'_t soient légèrement trop grandes.

Au contraire, dans le calcul de ρ_t à l'aide de la formule (4) (p. 10), la valeur trouvée pour la chaleur de vaporisation interne *doit être trop petite,* puisque Q est dans le second membre de l'équation.

J'ai constaté, en effet, que la courbe des chaleurs de vaporisation interne ainsi calculées ne se raccordait nullement avec les valeurs de ρ données p. 52 et p. 53 de ma Thèse, et restait fort au-dessous de la courbe sensiblement rectiligne représentant ces valeurs. C'est même en cherchant l'explication de ce résultat que j'ai été conduit à trouver la vraie cause de l'irrégularité observée, c'est-à-dire la présence d'une petite quantité de suif dans la sphère employée.

Il était, par suite, nécessaire de recommencer des expériences sur la chaleur spécifique de la vapeur saturée de l'acide sulfureux, en opérant cette

(¹) La dissolution des gaz, en dehors de tout phénomène chimique concomitant, étant comparable à la condensation d'une vapeur, est toujours accompagnée d'un dégagement de chaleur.

fois sur un gaz parfaitement pur et en prenant des précautions minutieuses pour empêcher l'introduction accidentelle de toute substance étrangère.

C'est ce que j'ai fait en me servant cette fois comme récipient A du cylindre décrit (p. 14) et représenté (*fig.* 2). Le calcul des quatorze expériences faites ainsi est donné en détail dans les Tableaux suivants :

Nouvelles expériences sur la vapeur saturée de l'acide sulfureux.

DATE.	P.	$t+\varepsilon$.	θ.	t.	ε.	π.	$P-\pi$.	π'.	$P-\pi'$.
	gr	°	°	°	°	gr	gr	gr	gr
22 mai 1895	15,745	156,40	21,632	153,60	2,80	15,4194	0,3256	»	»
28 »	10,575	154,30	20,556	143,45	10,85 (1)	20,2219	0,3531	»	»
29 »	7,480	142,95	21,010	132,30	10,65 (1)	7,0972	0,3828	»	»
5 juin	5,3657	116,35	20,574	116,35	0	4,9753	0,3904	0,5098	4,8559
10 »	5,2357	118,25	20,707	118,25	0	4,8404	0,3953	0,0851	5,1506
11 »	4,8050	115,10	21,095	115,10	0	4,4047	0,4003	0,0428	4,7622
12 »	4,2271	111,30	20,921	110,10	1,20	3,8245	0,4026	»	»
14 »	3,7065	105,30	21,008	104,60	0,70	3,2981	0,4084	»	»
17 »	3,2642	99,65	21,226	99,10	0,55	2,8505	0,4137	»	»
18 »	2,8168	93,75	21,401	92,90	0,85	2,3998	0,4170	»	»
19 »	2,4520	86,73	21,842	86,70	0,03	2,0282	0,4238	»	»
26 »	2,0983	80,00	23,120	80,00	0	1,6506	0,4477	»	»
1 juillet	1,7875	71,85	24,012	71,85	0	1,3287	0,4588	0,0333	1,7542
24 »	1,4685	65,08	24,078	63,40	1,68	1,0067	0,4618	»	»

SUITE DU TABLEAU.

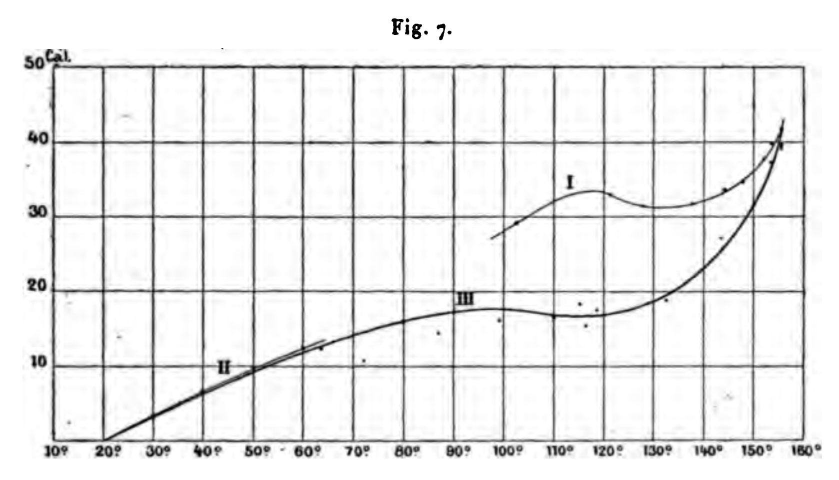
DATE.	q.	M.	Q.	$\pi\rho_0$.	$\frac{P}{E}\int_0^t p\,du'$.	y_0^t.	y_{20}^0.	y_{20}^t.
	Cal	gr	Cal	Cal	Cal	Cal	Cal	Cal
22 mai 1895	2885,60	13,610	1042,56	1159,85	−445,22	−36,35	− 0,56	−36,91
28 »	2613,69	13,608	770,76	772,98	−281,72	−26,86	− 0,19	−27,05
29 »	2249,78	13,577	578,27	535,51	−180,27	−18,38	− 0,34	−18,72
5 juin	1677,50	13,507	383,86	»	»	−15,21	− 0,20	−15,41
10 »	1701,81	13,512	383,81	»	»	−17,21	− 0,24	−17,45
11 »	1612,75	13,504	343,31	»	»	−17,90	− 0,38	−18,28
12 »	1523,69	13,494	303,10	328,98	− 82,77	−16,17	− 0,32	−16,49
14 »	1397,92	13,477	260,38	248,85	− 68,57	−15,39	− 0,34	−15,73
17 »	1277,19	13,463	221,01	214,84	− 56,70	−15,48	− 0,42	−15,90
18 »	1176,42	13,447	203,03	180,73	− 45,08	− 8,09	− 0,48	− 8,57
19 »	1028,17	13,429	155,61	152,39	− 35,80	−13,69	− 0,63	−14,32
26 »	882,02	13,411	119,20	123,21	− 26,90	−14,73	− 1,11	−15,84
1 juillet	733,49	13,390	99,59	»	»	− 9,33	− 1,45	−10,78
24 »	621,30	13,372	72,55	74,78	− 13,78	−10,90	− 1,41	−12,31

(1) Ces grandes valeurs de ε proviennent de ce que le pointeau du cylindre ne fermait pas d'une façon absolue; dès lors, au voisinage de la température critique, sous l'influence de la forte pression des gaz, l'appareil perdait de son poids pendant qu'il était dans l'étuve à température constante.

Ces Tableaux montrent que les expériences des 5, 10, 11 juin et celle du 1er juillet correspondent au cas où, à la température constante de l'étuve, il reste du liquide en présence de la vapeur saturée. Dans ces conditions, y'_0 a dû être calculé à l'aide de la formule (3)′ qui exige la connaissance de la quantité x'_0.

J'ai réuni sur le même tracé graphique les courbes $-y'_{20}=f(t)$ provenant de mes deux séries d'expériences (courbes I et III), ainsi que celle (II) que j'ai obtenue en me servant des valeurs de $m'-m$, entre 0° et 60°,

Fig. 7.



données p. 71 de ma Thèse. En ajoutant à ces valeurs celles de m données directement par mes expériences faites au-dessous de 100° et où la correction de la vapeur saturée est pour ainsi dire nulle, on obtient le Tableau suivant :

t.	$m'-m$.	m_t.	m'_t.	Valeur moyenne de m'.
20°	−0,684	+0,327	−0,357	−0,3455
30	−0,668	+0,334	−0,334	
40	−0,654	+0,342	−0,312	−0,323
50	−0,640	+0,3516	−0,2884	−0,3002
60	−0,628	+0,362	−0,256	−0,2722

On tire de là aisément

$$\left\{\begin{aligned} y_{20}^{30} &= -\ 3{,}455 \text{ Cal}, \\ y_{20}^{40} &= -\ 6{,}680, \\ y_{20}^{50} &= -\ 9{,}685, \\ y_{20}^{60} &= -12{,}414. \end{aligned}\right.$$

Ces nombres ont donné les ordonnées de la courbe II.

La *fig.* 7 montre que la courbe III jouit des mêmes propriétés que la courbe I, c'est-à-dire qu'elle admet une tangente verticale au point critique et qu'elle possède un maximum et un minimum de l'ordonnée séparés par un point d'inflexion. Conformément au raisonnement de la page 34, les valeurs absolues de y'_{20} sont nettement plus faibles pour le gaz pur que pour le gaz souillé par la présence du suif. Enfin, et surtout, *la courbe III se raccorde très sensiblement avec la courbe II*, ce que ne faisait pas la courbe I et ce qui est un précieux contrôle de l'exactitude de mes expériences.

En réalité, la courbe III passe très légèrement au-dessous de la courbe II à laquelle elle est tangente pour $t = 20°$, d'où il s'ensuit que les valeurs de $m' - m$ données dans ma Thèse sont légèrement trop grandes en valeur absolue, et qu'en vertu de la relation

$$m' - m = T \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{T}\right),$$

la variation de λ en fonction de la température est légèrement trop rapide.

Admettant définitivement la courbe III comme donnant correctement les valeurs de $-y'_{20}$, je l'ai utilisée pour calculer à nouveau les valeurs de x''_{-20}. Il m'a suffi pour cela de recalculer la colonne qui donne $(P - \pi)y'_0$ et j'en ai déduit les valeurs de x''_{-20} définitivement adoptées (¹). Les corrections ainsi apportées sont excessivement faibles dans toutes les expériences faites au-dessous de 139° et pour lesquelles le poids $P - \pi$ ne dépasse guère 1^{cgr}.

A titre de renseignement, le Tableau suivant donne la comparaison des valeurs *anciennes* de x''_{-20}, obtenues sans faire la correction du suif et avec les premières valeurs de la chaleur spécifique de la vapeur saturée, et des *nouvelles* valeurs, la première approximation contenant le calcul fait avec les anciens y'_{20}, la deuxième le calcul fait avec les y'_{20} de la courbe III.

(¹) Théoriquement, il y a encore une petite complication résultant de ce que quatre expériences sur la vapeur de l'acide sulfureux exigeant le calcul complet, les nouvelles valeurs de x''_{20} changent légèrement les quatre valeurs de y'_{20} correspondant à ces expériences. Les variations ainsi obtenues sont de l'ordre du centième de calorie et par conséquent insignifiantes.

t.	x_{-20}^{t} ancien.	x_{-20}^{t} nouveau. 1re approximation.	x_{-20}^{t} nouveau. 2e approximation.
°	Cal	Cal	Cal
+ 32,54	16,89	16,82	16,82
42,60	20,30	20,19	20,19
50,38	23,08	22,96	22,96
60,40	26,53	26,36	26,36
70,34	30,29	30,04	30,04
80,46	34,31	34,07	34,07
90,72	38,25	38,00	38,00
99,80	41,88	41,57	41,57
109,53	45,97	45,72	45,71
123,91	52,19	52,05	52,04
131,10	56,31	56,24	56,24
139,20	59,75	59,89	59,80
145,15	63,34	63,81	63,77
150,47	67,38	68,07	68,01
153,80	70,42	71,32	71,23
155,50	71,53	73,12	73,09

Les quantités de chaleur x_{-20}^{t} sont bien représentées entre $-20°$ et $+140°$ par la formule parabolique à quatre termes :

$$x_{-20}^{t} = 6,33 + 0,317\,t + 0,000082\,t^2 + 0,00000295\,t^3.$$

Valeurs de m. — La chaleur spécifique vraie à la température t, ou la quantité m, est donnée correctement entre 0° et 110° ou 120° par

$$m = \frac{dx}{dt} = 0,317 + 0,000164\,t + 0,00000885\,t^2.$$

Au delà de ces limites, on calcule m, en consultant la courbe graphique, par la formule

$$m = \frac{x_{-20}^{t-\alpha} + x_{-20}^{t+\alpha}}{2\alpha},$$

où α est égal à quelques degrés. On trouve ainsi (1) :

---

(1) Ces nombres diffèrent légèrement de ceux que j'ai donnés dans ma Note sur ce sujet (voir *Comptes rendus*, août 1894).

t.	m.	t.	m.
− 20°	0,315	+ 110°	0,442
− 10	0,316	+ 120	0,470
0	0,317	+ 130	0,510
+ 10	0,3195	+ 135	0,550
+ 20	0,324	+ 140	0,620
+ 30	0,330	+ 145	0,720
+ 40	0,338	+ 148	0,800
+ 50	0,347	+ 150	0,872
+ 60	0,359	+ 151	0,920
+ 70	0,372	+ 152	0,980
+ 80	0,387	+ 153	1,070
+ 90	0,403	+ 154	1,355
+ 100	0,422	+ 155	1,800
		+ 155,5	2,85

Valeurs de m'. — Le calcul de m' se fait de la même façon au moyen des éléments fournis par la courbe III, qu'il ne m'a pas été possible de représenter avec quelque exactitude à l'aide d'une formule simple. On trouve ainsi :

t.	m'.	t.	m'.
0°	− 0,410	100°	+ 0,027
10	− 0,390	110	+ 0,062
20	− 0,357	120	− 0,078
30	− 0,330	125	− 0,176
40	− 0,300	130	− 0,306
50	− 0,270	135	− 0,452
60	− 0,235	140	− 0,620
70	− 0,205	145	− 0,848
80	− 0,165	150	− 1,253
90	− 0,095	155	− 3,850

La loi de variation de m et m' en fonction de la température est représentée par la *fig.* 8.

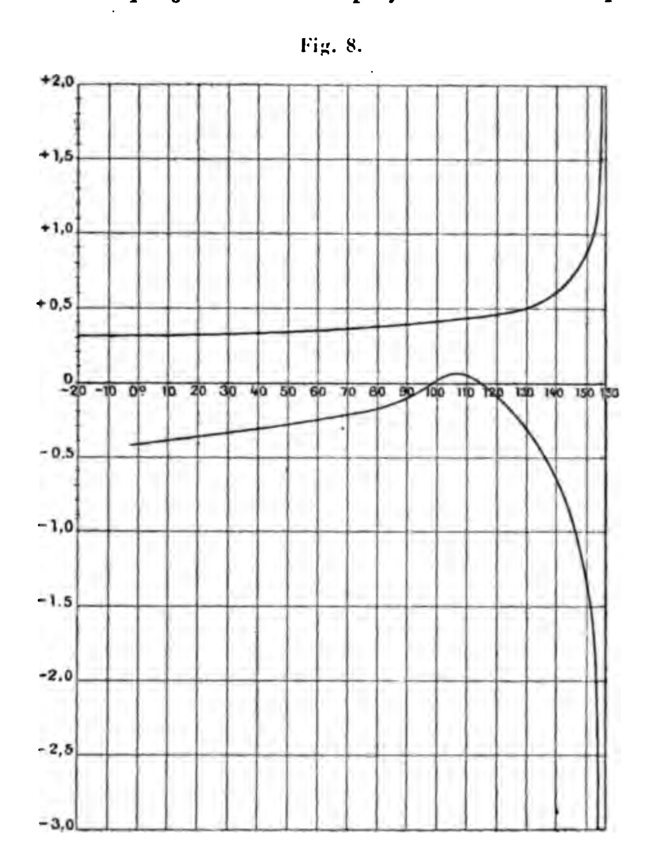
La loi de variation de $m' - m$ est donnée par le Tableau suivant, dans lequel $T = 273 + t$:

t.	m' − m.	(m' − m)T.
0°	− 0,727	− 198,47
10	− 0,7095	− 200,78
20	− 0,681	− 199,53
30	− 0,660	− 199,98
40	− 0,638	− 199,69
50	− 0,617	− 199,29
60	− 0,594	− 197,80
70	− 0,577	− 197,91
80	− 0,552	− 194,86
90	− 0,498	− 180,77

On voit que le produit $(m' - m)T$, après être resté sensiblement constant, diminue en valeur absolue. Entre 0° et 50°, la moyenne est $-199,62$.

Cela prouve, ainsi que je l'ai montré p. 71 de ma Thèse, qu'entre 0° et 50°

Fig. 8.



la chaleur de vaporisation de l'acide sulfureux est de la forme

$$\lambda = a - bT,$$

a étant précisément égal à la valeur changée de signe de $(m' - m)T$. C'est là une vérification intéressante, mais au point de vue qualitatif seulement parce que m et m' ne sont pas obtenus avec une approximation suffisante pour considérer $(m' - m)T$ comme connu à quelques unités près du premier ordre décimal.

Chaleur de vaporisation interne. — Connaissant les valeurs exactes des quantités x et y, j'ai pu calculer la chaleur de vaporisation interne ρ au moyen des formules (4) et (4') que j'ai établies au commencement de

ce Mémoire (p. 10 et 11). Le Tableau suivant contient les nombres obtenus ainsi, auxquels j'ai joint les densités d et d' du liquide et de la vapeur saturée et les valeurs du rapport $\frac{\rho}{d-d'}$:

t.	ρ.	δ.	δ'.	$\frac{\rho}{d-d'}$.
°	Cal			
153,6	12,72	0,6910	0,3580	38,2
143,45	26,80	0,8410	0,2520	45,5
132,3	38,76	0,9414	0,1710	50,3
116,35	45,83	1,0390	0,1124	49,4
118,25	43,41	1,0290	0,1180	47,6
115,1	43,55	1,0456	0,1093	46,5
110,1	46,19	1,0694	0,0970	49,3
104,6	48,23	1,0938	0,0850	47,8
99,1	49,33	1,1176	0,0750	47,3
86,7	53,76	1,1688	0,0564	48,3
80,0	52,90	1,1929	0,0481	46,2
63,4	59,60	1,2485	0,0334	49,0

Si on laisse de côté la valeur de ρ relative à 153°,6, laquelle est visiblement un peu faible, les autres nombres donnent un rapport à peu près rigoureusement constant dans toute l'étendue des expériences, la valeur moyenne étant 47,9. Mes expériences vérifient donc très bien la loi de M. J.-D. Van der Waals, d'après laquelle on a

$$\rho = a(d - d'),$$

a étant constant lorsque le poids moléculaire est indépendant de la température, loi qu'il a déduite de la forme donnée par Gauss à l'énergie potentielle des liquides [1]. Les expériences sur l'acide carbonique et le protoxyde d'azote, que j'ai faites en collaboration avec M. L. Cailletet, ont déjà donné à M. G. Bakker deux autres vérifications très satisfaisantes de cette loi [2].

Il est bon de remarquer que la quantité a n'est pas une constante absolue, mais qu'elle diminue constamment lorsque la température s'élève en tendant vers une valeur *limite* dont elle diffère très peu dès que la température s'approche à 50° ou 60° du point critique. Cette valeur limite paraît, lorsqu'on passe d'un corps à l'autre, varier en raison inverse de la température critique absolue, comme le montre ce Tableau :

---

(1) J.-D. Van der Waals, *Continuité, etc.*, trad. Dommer et Pomey, p. 166 et 167.
(2) Gerrit Bakker, *Theorie der Vlœistoffen en Dampen*, 1888; Schiedam.

Corps.	a.	$\Theta = 273 + t_c$.	$a\Theta$.
Acide carbonique.........	61	304,4	$1,857.10^4$
Protoxyde d'azote........	60	310	1,860
Acide sulfureux..........	47,9	429	2,055
Chloroforme.............	38	537	2,04

Il serait intéressant d'étendre le nombre de ces vérifications qui sont vraiment trop peu nombreuses pour qu'on puisse en conclure avec certitude que le théorème des états correspondants s'applique dans ce cas.

Chaleur de vaporisation. — Si, à la chaleur de vaporisation interne ρ, on ajoute la chaleur de vaporisation externe $r = \frac{1}{E}p(u' - u)$, on obtient la chaleur de vaporisation proprement dite λ. A cause de l'incertitude qui règne sur la valeur de p, j'ai fait le calcul en partant soit de la formule (b) de M. J. Bertrand, soit des nombres de Sajotchewski (1) :

t.	r_1.	λ_1.	r_2.	λ_2.	λ_3.	$\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$.	$\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$.
o	Cal	Cal	Cal	Cal	Cal		
153,6	0,24	12,96	0,25	12,97	14,09	1,086	1,086
143,45	4,19	30,99	4,32	31,12	31,75	1,024	1,020
132,3	5,96	44,72	6,09	44,85	42,89	0,959	0,956
116,35	7,36	53,19	7,47	53,30	54,11	1,017	1,015
118,25	7,20	50,61	7,31	50,72	52,95	1,046	1,044
115,1	7,42	50,97	7,53	51,08	54,85	1,076	1,074
110,1	7,65	53,84	7,73	53,92	57,64	1,070	1,068
104,6	7,98	56,21	8,06	56,29	60,45	1,075	1,074
99,1	8,14	57,47	8,45	57,59	63,02	1,096	1,094
86,7	8,44	62,20	8,61	62,37	68,09	1,095	1,092
80,0	8,51	61,41	8,76	61,66	70,47	1,147	1,143
63,4	8,29	67,89	8,63	68,23	75,43	1,111	1,105

La courbe $\lambda = f(t)$ qu'on obtient avec ces nombres a la forme connue et se raccorde très sensiblement avec les valeurs données dans ma Thèse pour l'intervalle 0° — 60°.

C'est là, avec la vérification de la loi de M. J.-D. Van der Waals, une précieuse vérification de l'exactitude de mes mesures.

Dans le but de voir jusqu'à quel point le théorème des états correspondants s'applique aux chaleurs de vaporisation de l'acide sulfureux et de

(1) J. BERTRAND, *Thermodynamique*, p. 176. r_1 et λ_1 sont obtenus en partant de la formule (b), r_2 et λ_2 en partant des nombres de Sajotchewski.

l'acide carbonique, j'ai calculé par la formule

$$\lambda^2 = 117,303(31 - t) - 0,466(31 - t)^2,$$

que j'ai donnée dans ma Thèse, les chaleurs de vaporisation λ_3 de l'acide carbonique pour les températures qui *correspondent* à celles des nombres λ_1 et λ_2.

Les deux dernières colonnes du Tableau précédent donnent la comparaison des rapports $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ et $\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ ainsi obtenus. Abstraction faite du nombre relatif à 153°,6 et des irrégularités qu'affectent toujours les nombres expérimentaux, on voit que le théorème des états correspondants ne paraît s'appliquer ici que tout à fait au voisinage de la température critique; à 40° de cette température, le degré d'inexactitude du théorème atteint $\frac{4}{100}$ à $\frac{5}{100}$, et cet écart va en augmentant régulièrement à mesure qu'on s'éloigne de plus en plus de cette température (1).

Par contre, la chaleur de vaporisation interne obéit nécessairement au théorème de M. Van der Waals en vertu de la loi du même physicien vérifiée p. 42, puisque les densités d et d' y obéissent elles-mêmes comme je l'ai montré antérieurement (2).

Remarque. — D'après la façon même dont est dirigé le calcul de la chaleur de vaporisation interne, dans mes expériences, la chaleur de vaporisation λ satisfait nécessairement à la relation

$$m' = m + \frac{d\lambda}{dT} - \frac{\lambda}{T}.$$

Il suffit pour le voir de considérer à t° 1gr de liquide saturé dans un vase et de le transformer en vapeur saturée à $t + dt$. On peut, pour cela, ou bien porter le liquide saturé de t à $t + dt$, puis le vaporiser à $t + dt$, ou bien le vaporiser à t° et porter la vapeur saturée de t à $t + dt$.

L'application du principe de l'équivalence, combinée à la formule de Clapeyron, redonnera la formule précédente.

Le présent Travail, dans lequel λ est déduit en somme d'expériences

---

(1) La comparaison de l'acide sulfureux et de l'acide carbonique n'est pas d'un choix heureux parce que, comme je l'ai montré dans mon Mémoire *Sur la densité critique*, ces corps appartiennent à des *groupes* différents. Il est possible que, en comparant les chaleurs de vaporisation de deux corps appartenant au même groupe, le théorème des états correspondants se vérifie d'une façon beaucoup plus satisfaisante.

(2) E. MATHIAS, *Remarques sur le théorème des états correspondants.*

calorimétriques donnant m et m', est donc exactement l'inverse de ma Thèse dans laquelle les mesures directes donnaient λ, la formule précédente permettant le calcul de $m' - m$. Les deux Travaux ne se confondent pas, ne s'excluent pas et la concordance de leurs résultats, en ce qui concerne l'acide sulfureux, n'est pas un fait négligeable.

Points d'inversion et maximum de m'. — La courbe III de la *fig.* 7 fournit directement, pour les températures d'inversion et du maximum de m', les nombres suivants :

	Température centigrade.	Température réduite.
Premier point d'inversion	97°,5	0,864
Second »	114,0	0,902
Maximum de m'	106,0	0,883

Au point de vue graphique, c'est le maximum de m' qui est le mieux défini ; le maximum et le minimum de la courbe III étant extrêmement peu prononcés, les températures des deux points d'inversion, sensiblement équidistantes du maximum de m', sont assez difficiles à fixer avec une grande précision. Quoi qu'il en soit, on voit que les températures d'inversion *réduites* ainsi trouvées diffèrent considérablement de celles que l'on connaît déjà et dont M. L. Natanson a rassemblé la plus grande partie dans son Mémoire *Sur la détente adiabatique au voisinage du point critique* (1). Malgré les divergences extrêmes des températures réduites qu'il cite et qui varient de 0,65 à 0,92, ce physicien admet que le théorème des états correspondants s'applique aux températures d'inversion et que, *pour le premier point d'inversion* seul connu autrefois, la température réduite correspondante, commune à tous les corps, est voisine de 0,75.

Il ne m'est pas possible de souscrire à l'opinion de M. L. Natanson. J'ai réuni dans le Tableau suivant les températures d'inversion calculées par Cazin (2) ainsi que les éléments qui ont servi à leur calcul ; j'y ai joint les températures calculées autrefois par Dupré (3), la température critique (valeur moyenne) et les températures réduites calculées pour les nombres de Cazin et ceux de Dupré.

(1) NATANSON, *Journ. de Phys.*, [3] ; 1895 et *Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, avril 1895.

(2) CAZIN, *Ann. de Ch. et de Phys.*, [4], t. XIV ; 1868.

(3) A. DUPRÉ, *Ann. de Ch. et de Phys.*, [4], t. III ; 1864.

CORPS.	LIMITES de détermination de la chaleur		TEMPÉRATURE d'inversion calculée.		TEMPÉRATURE		
					critique.	d'invers. réduite.	
	totale.	spécifique du liquide.	(Cazin.)	(Dupré.)		(Cazin.)	(Dupré.)
Chloroforme	0° à 160°	—30° à +60°	123°,48	121°	+264°	0,738	0,734
Benzine	0 à 210	»	100,0	118	289	0,663	0,696
Tétrachlorure de carbone	0 à 160	—30 à +30	128,9	127	283	0,723	0,719
Acétone	0 à 160	—30 à +30	201,8	200	234	0,936	0,933
Alcool	irrégulière	—20 à +80	135	135	243	0,791	0,791
Éther ordinaire	0 à 120	—30 à +35	—113	—116	194,4	0,342	0,336
Sulfure de carbone	0 à 140	—30 à +45	imaginaire	imaginaire	279	»	»
Eau	»	»	500	520	365,5	»	»
Chlorure d'éthyle	»	»	»	142	182,5	»	0,911
Iodure d'éthyle	»	»	»	197	286,1	»	0,841

La simple inspection de ce Tableau montre que le théorème des états correspondants ne s'applique pas aux points d'inversion, au moins sous la forme simple indiquée par M. L. Natanson. En effet, pour l'éther ordinaire, corps doué de propriétés régulières, une partie énorme de la courbe $m' = f(t)$ est au-dessus de l'axe des abscisses, et le premier point d'inversion correspond à une température réduite extraordinairement faible.

Par contre, il semble bien qu'il existe des corps pour lesquels toute la courbe serait au contraire au-dessous de l'axe des abscisses et pour laquelle il n'y aurait aucun point d'inversion. Peut-être est-ce le cas du sulfure de carbone; mais on ne peut l'affirmer bien qu'on ait trouvé par le calcul des valeurs imaginaires pour la température d'inversion, parce que la température $+160°$ à laquelle s'arrête le calcul de m' est encore très éloignée de la température critique (279°). Ce cas est probablement celui de l'acide carbonique. J'ai en effet trouvé pour ce corps des valeurs de $m' - m$ négatives et très grandes en valeur absolue ([1]). Or, les expériences que j'ai faites sur l'acide carbonique liquide montrent que la chaleur spécifique du liquide m est de l'ordre de 0,55 vers 0° et non 0,30 comme le croyait Regnault; il s'ensuit que le deuxième point d'inversion est situé très bas à moins qu'il ne soit imaginaire. La température réduite relative à un point d'inversion donné

([1]) E. MATHIAS, *Thèse de Doctorat*, p. 70.

n'est donc certainement pas un nombre constant, ce qui est la négation du théorème des états correspondants.

Je ferai remarquer, d'autre part, que pour les trois premiers termes du Tableau précédent les températures d'inversion calculées sont trop basses. En effet, elles se trouvent dans les limites où est exacte la formule qui donne la chaleur totale de vaporisation L, mais beaucoup au-dessus de l'intervalle dans lequel a été mesurée la chaleur spécifique du liquide

$$q = \int_0^t m\,dt.$$

Le point d'inversion est obtenu par la résolution de l'équation

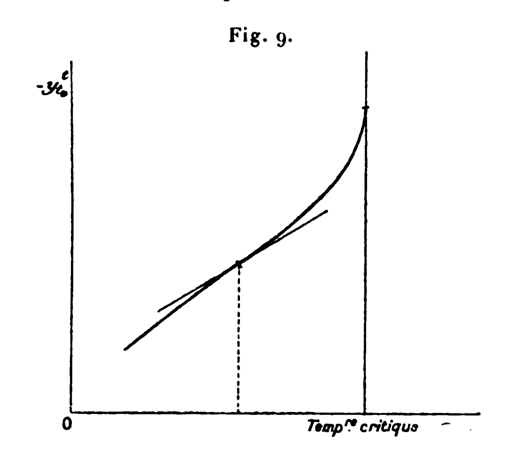
$$-T\frac{dL}{dt} = q - L \qquad T = 273 + t.$$

D'après ce qui précède, la valeur adoptée pour q est trop faible; le deuxième membre est trop faible, donc il en est de même du premier membre; or T et $-\frac{dL}{dt}$ augmentent et diminuent en même temps, donc T trouvé est trop petit.

Ce qui précède montre qu'on n'obtient aucune précision dans le calcul des températures d'inversion quand on essaye d'extrapoler les formules qui donnent λ et m en fonction de la température. Expérimentalement, on peut déterminer les températures d'inversion par deux méthodes bien différentes.

Ou bien incidemment, comme je l'ai fait, en étudiant la chaleur spéci-

Fig. 9.



fique de vapeur saturée et traçant la courbe $-y'_{t_0} = f(t)$. Nous avons vu sa forme dans le cas de deux points d'inversion réels; dans le cas où il n'y

... elle possède simplement ... Le cas limite des deux points ... point d'inflexion à tangente

... Cazin, dans laquelle on ...

... valeurs de m et m' que ... vérification, sur ces élé- ... correspondants dû à M. le ... pour un Mémoire ... sur l'acide sulfureux la ... par Nadejdine (¹) ... de vaporisation ... pour une nombreuse ... les alcools, à 0°, ... dans ces conditions, correspondante pour ...

étant la pression critique. Pour ... la constante égale 4,64. Or, pour l'acide sulfureux, la température correspondante est $-20°$, et l'on a dans ces conditions

$$m = 0,515, \quad \lambda = \ldots, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda}{\ldots} = \ldots$$

La relation empirique de Nadejdine ne paraît pas se vérifier.

Réflexions sur la méthode employée dans ces expériences. — Le développement donné à ce Mémoire a pour but de démontrer que la méthode que j'ai proposée (²) pour déterminer expérimentalement, d'une manière directe, m, m' et λ n'est pas une pure spéculation, qu'elle est praticable et qu'elle donne bien les résultats qu'on était en droit d'en attendre.

Cette méthode exige que le corps expérimenté, pour lequel p, u et u' sont connus à toute température, n'attaque pas le vase A, sinon il y a, à un moment donné quelconque, incertitude sur la valeur du poids total P de

(¹) NADEJDINE, *Exner Repertorium*, t. XX, p. 446.

(²) MATHIAS, *Comptes rendus*, 13 août et 12 novembre 1894.

liquide et de vapeur saturée qui est renfermé dans l'appareil. S'il n'y a pas attaque du vase, la méthode est tout à fait générale et, moyennant les précautions spéciales à chaque cas, peut s'appliquer à des températures très hautes ou très basses, la seule difficulté consistant à maintenir constantes, pendant des heures entières, ces températures très hautes ou très basses.

Lorsqu'on mesure, avec de très faibles poids de matière, la chaleur spécifique de la vapeur saturée, la précision des mesures calorimétriques doit être poussée le plus loin possible. Supposons, en effet, que le poids de vapeur soit de 2^{gr}, que les erreurs de lecture du thermomètre calorimétrique soient de $\frac{1}{400}$ au commencement et à la fin, et s'ajoutent; si l'on opère, comme je l'ai fait, avec le calorimètre de 1^{lit}, l'erreur commise de ce chef, indépendamment de toutes les autres, s'élève à 5^{Cal}, ce qui fausse de 2,5 unités le nombre y'_0 et la chaleur de vaporisation. La régularité des nombres que j'ai obtenus dans l'étude de la vapeur saturée de l'acide sulfureux montre le soin avec lequel les expériences étaient faites.

Considérations générales. — Ce qui précède montre que, pour un corps, l'étude du système (p, u, u') doit précéder celle du *système calorimétrique* (λ, m, m'), les expériences que je viens de décrire étant le complément et la suite naturelle de travaux analogues à ceux de M. S. Young (¹), travaux que j'ai analysés dans mon précédent Mémoire.

Remarquons d'abord le parallélisme remarquable des deux systèmes

$$(p, u, u'), \qquad (\lambda, m, m').$$

Dans chacun d'eux, les grandeurs p et λ jouent un rôle à part, car elles se rapportent l'une et l'autre aussi bien au liquide saturé qu'à la vapeur saturée, tandis que les deux autres couples de grandeurs ne se rapportent qu'à l'un ou à l'autre. Comme conséquence, il se trouve que p et λ sont susceptibles de mesures expérimentales directes indépendantes, pour p de u et u', et pour λ ne dépendant que de m (²).

On peut, dans une même étude expérimentale, déterminer les trois élé-

(¹) M. S. Young a bien voulu m'envoyer un certain nombre des corps chimiquement purs sur lesquels il a opéré. Je me propose, en déterminant sur eux le système λ, m, m', de faire un travail digne de celui de M. S. Young; ce sera la meilleure manière de lui prouver ma gratitude.

(²) Si au point de vue purement expérimental les deux systèmes de grandeurs peuvent être considérés comme indépendants, il ne faut pas oublier qu'ils sont reliés théoriquement

ments d'un même système de grandeurs pour toutes les températures inférieures à la température critique. Ce Mémoire le démontre pour le deuxième système; pour qu'il en soit de même du premier, il suffit d'employer le dispositif expérimental d'Ansdell (1).

Il est intéressant de se demander comment il se fait que la méthode expérimentale décrite dans ce Mémoire donne d'emblée toutes les grandeurs du *système calorimétrique*. Un raisonnement par analogie va fournir la réponse, qui sera obtenue en comparant la *méthode des coupes*, constamment appliquée en Zoologie, par exemple, avec la méthode calorimétrique que j'ai suivie.

Au point de vue abstrait, on peut définir la *méthode des coupes* : « *une série d'opérations identiques* (observation des coupes au microscope) *ayant, suivant la façon d'opérer, une suite nécessaire ou arbitraire et résolvant complètement la question* (étude de l'organisation de l'animal). »

Les coupes de l'animal sont obtenues en commençant par une extrémité pour finir par l'autre; supposons que, pour des raisons quelconques (par exemple, la non-conservation des coupes), on soit obligé d'observer les préparations au fur et à mesure et de les jeter ensuite. Dans ces conditions, la suite des opérations est déterminée, et l'on ne peut intervertir l'ordre de deux opérations consécutives ni revenir sur ses pas (première forme).

Au contraire, on peut supposer l'animal découpé en coupes numérotées se conservant indéfiniment, et alors on peut faire les observations dans un ordre quelconque (pourvu qu'on les fasse toutes) et répéter chaque observation autant de fois qu'on le veut.

La méthode suivie dans l'étude du *système calorimétrique* est, comme la méthode des coupes (première forme) : *une série d'opérations identiques* (mesures calorimétriques) *ayant une suite nécessaire* (puisque le vase se vide du commencement à la fin) *et résolvant complètement la question* (on détermine λ, m et m').

Par contre, la méthode suivie dans l'étude du système (p, u, u') par Ansdell est identique à la deuxième forme de la méthode des coupes; mais

---

par la formule de Clapeyron

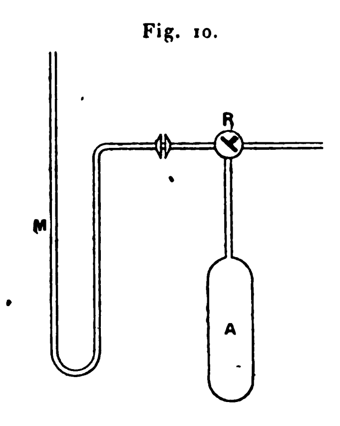
$$\lambda = \frac{T}{E}(u' - u)\frac{dp}{dt}.$$

(1) Ansdell, *Proc. Roy. Soc.*, t. XXX, p. 117, et t. XXIX, p. 209; 1879.

on peut facilement concevoir le dispositif expérimental correspondant à la première forme.

Soit un vase A, d'une forme quelconque, résistant, réuni par un robinet à 3 voies (ou une disposition équivalente), d'une part à un manomètre, de l'autre à l'air extérieur, et plein d'un liquide saturé (*fig.* 10).

Fig. 10.



L'appareil est plongé dans une étuve à température constante. Supposons que, la pression p étant lue au manomètre et A étant plein de liquide à t°, on puisse détacher A du manomètre et le peser; l'excès de poids sur l'appareil vide donne facilement la quantité u à t°. Si l'on élève progressivement la température, on pourra, en vidant peu à peu par le robinet R l'excès de liquide, mesurer u de nouveau ainsi que p, et ainsi de suite jusqu'à la température critique. En continuant à vider et abaissant la température, on aura de la même façon le volume spécifique u' de la vapeur saturée (¹).

On voit que cette méthode est, jusque dans les détails, identique à celle que j'ai suivie pour le système calorimétrique (λ, m, m'). Par contre, on ne voit pas immédiatement le dispositif expérimental qui permettrait l'étude de ce système avec la deuxième forme de la méthode des coupes.

On peut pousser le parallélisme plus loin encore. J'ai montré, avec M. Cailletet, qu'on peut mesurer la densité de vapeur saturée (et, par suite, u') à toutes les températures d'une façon tout à fait indépendante de la densité du liquide. Or, j'ai précisément disposé les choses, dans mes

(¹) Dans la pratique on laissera une trace de vapeur saturée au-dessus du liquide dans le premier cas, et dans le second un peu de liquide en contact avec la vapeur. Si l'appareil est transparent, il sera aisé, par des mesures de volume, de faire les corrections, ce qui est tout à fait analogue à ce que j'ai fait dans mes expériences calorimétriques.

[illegible] de façon que la chaleur spécifique de vapeur saturée se détermine [illegible] et indépendamment de la chaleur spécifique du liquide.

[illegible]

[illegible]

Les [illegible] dans l'étude du système [illegible] [illegible]

Les deux formes de la méthode dite *des coupes* s'interprètent facilement : la première forme est une *méthode à volume constant* (à la dilatation près du vase d'expérience, qui est inévitable) *et à masse variable* (la masse étant celle du corps étudié qui remplit le vase).

La seconde méthode est visiblement une *méthode à volume variable et à masse constante.*

Ces deux formes se rencontrent constamment en Physique dans l'étude *de la même question.* Ainsi, appliquée à l'étude de la loi de Mariotte, la *première forme donne* la méthode de Regnault, tandis que la seconde *forme donne* la *méthode suivie* par Dulong et Arago et les anciens physiciens. Appliquées à l'étude des densités des liquides par la méthode des *aréomètres*, les *deux formes* correspondent à la distinction classique des *aréomètres.*

On pourrait évidemment trouver d'autres analogies en Physique, mais je veux simplement retenir, de ce qui précède, ceci : que les méthodes que j'ai proposées pour l'étude des systèmes (p, u, u') et (λ, m, m') ne sont pas des méthodes artificielles, mais qu'elles ont un caractère de logique et de nécessité bien mis en évidence par le parallélisme qu'elles présentent avec les méthodes employées dans les Sciences naturelles.

Les physiciens voudront bien me pardonner ces quelques remarques dont le caractère est plutôt philosophique, et j'espère qu'ils y trouveront quelque intérêt.

SUR UN

CAS PARTICULIER DU MOUVEMENT

A CINQ CONDITIONS,

PAR M. VICTOR ROUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

I.

1. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. IX, p. 297 et suivantes), M. Pirondini s'est proposé de résoudre le problème suivant qui fait connaître une nouvelle et remarquable propriété des courbes de M. Bertrand :

Sous quelles conditions une ligne Σ, invariablement liée au trièdre fondamental d'une courbe (O) *et entraînée dans le déplacement de ce trièdre dont le sommet décrit la courbe, est-elle constamment normale aux trajectoires de ses différents points?*

Le trièdre fondamental dont il est question dans cet énoncé est formé, à chaque instant, par la tangente, la normale principale et la binormale au point O de (O).

M. Pirondini démontre d'abord que la courbe (O) ne peut être choisie arbitrairement, car ses deux courbures sont liées par une relation linéaire, ce qui revient à dire qu'elle appartient à la catégorie des courbes de M. Bertrand. De plus, la ligne Σ, invariablement liée à son trièdre fondamental et normale aux trajectoires de ses points, est une droite dont les équations générales renferment deux constantes arbitraires.

Nous nous proposons : 1° de reprendre la démonstration de ce théorème en le complétant sur quelques points; 2° d'étudier les surfaces réglées engendrées par les droites Σ satisfaisant aux conditions du problème proposé.

Pour cette étude, nous nous appuierons, à peu près exclusivement, sur trois équations déduites de celles qu'on trouve aux pages 8 et 10 de la première Partie du grand Traité de M. Darboux et que nous transcrirons ici pour la commodité du lecteur, en expliquant brièvement les notations employées. Ces formules, dans lesquelles les seuls éléments de (O) qui interviennent sont les rayons ρ et τ de courbure et de torsion (1), peuvent être présentées comme il suit :

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta X &= dx + \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) ds,\\ \Delta Y &= dy + \left(\frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau}\right) ds,\\ \Delta Z &= dz + \frac{y}{\tau}\, ds. \end{aligned}\right.$$

Pour les établir, on suppose que, dans une position quelconque du point O qui parcourt la courbe (O), on prend respectivement pour axes des x, des y et des z, la tangente, la normale principale et la binormale de (O) en O. Les lettres x, y, z désignent, à l'instant considéré, les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace que l'on fait correspondre à O, de sorte que ces coordonnées doivent être regardées comme des fonctions de l'arc s de (O) compté à partir d'une origine arbitraire. Ceci étant admis, ΔX, ΔY, ΔZ désignent les projections, sur les axes de coordonnées, du déplacement infiniment petit MM′ que subit le point M de l'espace lorsque, par l'effet du mouvement de O sur (O), ce point vient occuper la position infiniment voisine O_1.

Le mouvement à cinq conditions auquel se rapporte le problème de M. Pirondini est justement celui du trièdre formé par les axes de coordonnées pour lesquels les formules (A) ont été établies.

2. Nous ferons remarquer tout d'abord que, quelle que soit la courbe (O), on connaît une infinité de droites satisfaisant aux conditions du problème, savoir : 1° les normales à la courbe (O); 2° les parallèles à la binormale situées dans le plan rectifiant.

Les premières, en effet, sont normales à la trajectoire (O) d'un de leurs points O et, par suite, à celles de tous leurs autres points.

(1) Nous désignons ici par τ ce que M. Darboux désigne par $-\tau$.

Pour les autres, on s'en rend compte aisément comme il suit :

Les équations instantanées d'une droite L parallèle à la binormale OZ et située dans le plan rectifiant qui, dans ce cas, se confond avec le plan des yz, étant

$$x = l, \qquad y = 0,$$

les coordonnées instantanées d'un point quelconque M de L sont

$$x = l, \qquad y = 0, \qquad z = h,$$

quantités qui restent constantes pendant le mouvement, de telle sorte que les formules (A) donnent, pour ce point M,

$$\Delta Z = 0;$$

il en résulte, comme nous l'avions annoncé, que le déplacement de ce point est constamment normal à la droite L.

La question à résoudre consiste à rechercher dans quel cas il existe d'autres droites ou courbes Σ répondant à la question.

3. Considérons, en premier lieu, une courbe (O) dont les rayons de courbure ρ et τ soient simultanément constants, c'est-à-dire une hélice tracée sur un cylindre de révolution.

Dans le mouvement du trièdre fondamental, tout point M invariablement lié à ce trièdre décrit une hélice de même axe et de même pas que (O). Il en résulte immédiatement que celles des lignes Σ qui sont des droites sont les normales à ces hélices. Elles forment, comme l'on sait, un complexe linéaire qui peut être regardé comme le plus général de son espèce. De plus, dans le système d'axes adopté, ce complexe est défini par l'équation

$$\frac{p}{\rho} - \frac{q}{\tau} + a = 0, \tag{1}$$

en supposant que les équations instantanées d'une de ces droites Σ soient présentées sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x = ay + p, \\ z = by + q. \end{array} \right. \tag{2}$$

Pour exprimer, en effet, que les équations (2) sont celles d'une droite Σ, il faut écrire qu'on peut trouver, sur cette droite, un point $M(x, y, z)$, tel que le déplacement de ce point soit normal à la droite, ce qui donne la

condition

$$a.\Delta X - \Delta Y - b.\Delta Z = 0,$$

laquelle, en tenant compte des formules (A) et des équations (2), est indépendante de x, y, z et fournit la condition (1).

Envisageons maintenant les lignes courbes qui sont des lignes Σ. Il est évident que ces lignes sont celles dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire précédemment défini. On peut donc énoncer la proposition suivante qui, d'ailleurs, n'est pas nouvelle et peut aisément se déduire d'une remarque faite par M. Picard dans son *Traité d'Analyse* (t. I, p. 315).

Dans le mouvement du trièdre fondamental d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution, les lignes Σ, invariablement liées à ce trièdre, qui sont normales aux trajectoires de leurs différents points, sont celles dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire défini par les normales à l'hélice proposée.

4. Considérons, en second lieu, le cas général dans lequel les rayons de courbure ρ et τ de (O) ne sont pas simultanément constants.

Tout déplacement infiniment petit du trièdre fondamental $Oxyz$ est un déplacement hélicoïdal dont l'axe est parallèle à la caractéristique du plan rectifiant. Dans un tel déplacement, les droites normales aux trajectoires de leurs différents points forment un complexe linéaire défini par l'équation (1). Pour le déplacement suivant, on a un autre complexe, ρ et τ ayant varié, et ainsi de suite.

La question est donc de savoir dans quel cas les complexes en nombre infini, qui correspondent aux diverses valeurs de ρ et de τ, ont une ou plusieurs droites communes, en outre de celles qui correspondent aux valeurs générales

$$a = p = q = 0,$$

lesquelles sont les normales à la courbe (O) en O, ainsi que des parallèles à la binormale situées dans le plan rectifiant, qui sont fournies par des valeurs infinies de b, la valeur de a étant nulle, p et q restant quelconques, mais finis.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est qu'il existe une relation linéaire entre les courbures $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$.

Si l'on suppose, en effet, que tous ces complexes aient une droite commune autre que celles dont on vient de parler, l'équation (1) de ce complexe sera vérifiée pour des valeurs constantes et non toutes nulles de a, p, q. Par suite, il existe une relation linéaire entre les courbures.

Réciproquement, si l'on a, entre ces courbures, une relation linéaire

$$\frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau} = C, \tag{3}$$

A, B, C étant des constantes non nulles simultanément, on satisfera à l'équation de ce complexe, quelles que soient les valeurs de ρ et de τ, en posant

$$p = \lambda A, \qquad q = -\lambda B, \qquad a = -\lambda C,$$

et, dès lors, tous les complexes auront en commun une infinité de droites représentées par les équations

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -\lambda(Cy - A), \\ z &= by - \lambda B, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

renfermant deux paramètres arbitraires λ et b. Ces droites, normales aux trajectoires de leurs différents points dans toutes les positions du système mobile, forment une congruence linéaire ayant pour directrices les droites D et D′ définies par les équations

$$\text{(D)} \qquad x = 0, \qquad y = \frac{A}{C},$$

$$\text{(D')} \qquad y = 0, \qquad Bx + Az = 0.$$

D'ailleurs, il n'existe pas de courbe proprement dite qui réponde à la question, car les tangentes de toute courbe Σ devraient posséder la propriété requise dans l'énoncé, ce qui, d'autre part, est impossible, puisque les droites d'une congruence linéaire ne peuvent être les tangentes d'une courbe proprement dite.

Si, maintenant, on se rappelle que toute courbe dont les courbures ont entre elles une relation linéaire est une courbe de M. Bertrand, on peut énoncer le théorème suivant donné, en partie, par M. Pirondini :

Lorsque, dans le mouvement du trièdre fondamental d'une courbe (O) *dont les deux courbures ne sont pas simultanément constantes, une ligne* Σ, *invariablement liée à ce trièdre et distincte des normales à la courbe*

proposée ou des parallèles à la binormale situées dans le plan rectifiant, reste constamment normale aux trajectoires de tous ses points :

1° *La courbe* (O) *est une courbe de M. Bertrand;*

2° *La ligne* Σ *est l'une quelconque des droites de la congruence ayant pour directrices les droites fixes* D *et* D′ *définies ci-dessus.*

5. Ces droites D et D′ dépendent très simplement, comme on va le voir, de la binormale de la courbe donnée (O) et de la binormale de la courbe conjuguée (O′).

Supposons, en premier lieu, qu'aucun des coefficients A, B, C de la relation (3) ne soit nul. On pourra mettre cette relation sous la forme

$$(5)\qquad \frac{\sin\omega}{\rho}+\frac{\cos\omega}{\tau}=\frac{\sin\omega}{h}.$$

On sait que h représente la longueur constante du segment OO′ que l'on doit porter, à partir de O, sur la normale principale Oy, pour obtenir la courbe (O′) conjuguée de (O), qui appartient à la même catégorie que celle-ci. De plus, ω désigne l'angle constant formé par les plans osculateurs aux deux courbes (O) et (O′) en leurs points correspondants. (O. BONNET.)

Les équations des droites D et D′ deviennent alors

$$(\mathrm{D})\qquad x=0,\qquad y=h,$$

$$(\mathrm{D}')\qquad y=0,\qquad x\cos\omega+z\sin\omega=0.$$

On en déduit immédiatement que les directrices D et D′ de la congruence linéaire formée par les droites Σ sont les parallèles aux binormales de chacune des courbes (O) et (O′) qui rencontrent la courbe conjuguée, savoir en O′ pour la première, D, et en O pour la seconde, D′.

Cette conclusion convient au cas où la courbe (O) est à courbùre constante, pour lequel $\cos\omega=0$, ou $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas des courbes à torsion constante, $\sin\omega$ et h ont des valeurs nulles, de manière que

$$\tau=\lim\frac{h}{\sin\varpi}.$$

Alors, les deux courbes conjuguées se confondent ainsi que les directrices.

En revenant à l'équation générale (1) du complexe, on a évidemment, pour les équations de la congruence,

$$p = 0, \qquad q = a\tau,$$

de telle sorte que les équations générales des droites Σ peuvent s'écrire

$$x = ay,$$
$$z = by + a\tau,$$

a et *b* étant arbitraires. Toutes ces droites rencontrent l'axe des z, c'est-à-dire la binormale de (O), avec laquelle se confondent les droites D et D'.

Enfin, si le rapport des courbures de (O) est constant, ce qui exige que cette courbe soit une hélice tracée sur un cylindre, d'ailleurs arbitraire, on a $C = 0$. La droite D est rejetée à l'infini, ainsi que la courbe conjuguée (O'). Les équations de D' sont toujours

$$(\mathrm{D'}) \qquad y = 0, \qquad z = -\frac{B}{A}x = \frac{\tau}{\rho}x.$$

Cette droite D' se confond, par suite, avec la caractéristique du plan rectifiant zOx, car on sait que, pour une courbe quelconque, cette caractéristique fait, avec la tangente Ox, un angle μ tel que

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\tau}{\rho}.$$

II.

6. Abandonnant ici la suite des recherches par lesquelles M. Pirondini a terminé son intéressant Mémoire, nous nous proposons d'étudier les surfaces réglées engendrées par les droites de la congruence (D, D'). Nous démontrerons que ces surfaces sont applicables sur des surfaces réglées de M. Bertrand, c'est-à-dire qu'on peut les déformer, avec conservation des génératrices rectilignes, de manière que ces génératrices deviennent des normales principales de deux de leurs trajectoires orthogonales convenablement choisies [1].

---

[1] Ces surfaces réglées, dont les génératrices sont les normales principales de deux de leurs trajectoires orthogonales, courbes de M. Bertrand conjuguées, peuvent aussi être re-

Nous traiterons d'abord le cas où la courbe (O) est une courbe générale de M. Bertrand, en sorte que $\sin\omega$ et h seront différents de zéro, h étant fini.

Considérons une droite s'appuyant sur les droites D et D′ qu'elle rencontre respectivement en G et G′. Les équations de GG′ seront les suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \alpha u, \\ y = h + \beta u, \\ z = z_0 + \gamma u, \end{cases}$$

dans lesquelles α, β, γ sont les cosinus directeurs de la direction GG′, la variable u désignant la distance GM du point $G(o, h, z_0)$ au point $M(x, y, z)$ de la droite. En particulier, les coordonnées du point G′, où la droite rencontre le plan zOx, sont définies par les relations

$$(G')\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{h}{\beta}, \\ y = 0, \\ x = -\dfrac{\alpha}{\beta}h, \qquad z = z_0 - \dfrac{\gamma}{\beta}h. \end{cases}$$

Pour obtenir la relation qui doit exister entre les paramètres de cette droite, il reste à écrire que ce point G′ appartient à D′ dont l'équation dans le plan zOx est (n° 5)

$$x\cos\omega + z\sin\omega = 0.$$

On trouve ainsi la condition cherchée, que nous écrirons ainsi

$$(7)\qquad \gamma = \frac{\beta}{h}z_0 - \alpha\cot\omega,$$

et à laquelle il faut joindre la relation générale

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

---

gardées comme des surfaces réglées dont deux asymptotiques coupent les génératrices à angle droit. En tous les points de ces courbes, les rayons de courbure principaux de la surface réglée sont égaux et de signes contraires, de telle sorte que la surface réglée est inscrite à des surfaces minima admettant ces courbes pour asymptotiques. Nous avons donné le moyen de construire ces surfaces minima (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, 9ᵉ série, t. IV, p. 261 et 263).

Dans le mouvement qui amène le point O de (O) à la position infiniment voisine O_1, les projections, sur les axes instantanés du déplacement de M, supposé lui aussi mobile sur GG′, sont données par les formules (A), savoir :

$$\Delta \text{ de M} \quad \begin{cases} \Delta X = \alpha\, du + \left(1 - \dfrac{h}{\rho} - \dfrac{\beta u}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y = \beta\, du + \left[u\left(\dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{\gamma}{\tau}\right) - \dfrac{z_0}{\tau}\right] ds, \\ \Delta Z = \gamma\, du + \left(\dfrac{\beta u}{\tau} + \dfrac{h}{\tau}\right) ds. \end{cases}$$

Il résulte de là que le carré de l'élément linéaire de la surface réglée a pour valeur

$$dS^2 = \overline{\Delta X}^2 + \overline{\Delta Y}^2 + \overline{\Delta Z}^2 = du^2 + (L u^2 - 2 M u + N)\, ds^2,$$

en posant

$$L = \frac{\beta^2}{\rho^2} + \left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right)^2 + \frac{\beta^2}{\tau^2},$$
$$M = \frac{\beta}{\rho}\left(1 - \frac{h}{\rho}\right) + \frac{z_0}{\tau}\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right) - \frac{\beta h}{\tau^2},$$
$$N = \left(1 - \frac{h}{\rho}\right)^2 + \frac{z_0^2}{\tau^2} + \frac{h^2}{\tau^2};$$

car le terme en *du ds* s'évanouit identiquement, ce qui prouve, d'une autre manière, l'orthogonalité des lignes ayant respectivement pour équations

$$u = \text{const.}, \qquad s = \text{const.},$$

c'est-à-dire de la génératrice GG′ et des trajectoires de ses différents points.

En vertu de la relation (5), d'où l'on déduit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h} - \frac{\cot\omega}{\tau},$$

et de la relation (7), les valeurs de L, M, N se simplifient.

Introduisons d'abord les quantités auxiliaires

$$(8) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{\sin^2\omega} + \dfrac{z_0^2}{h^2}, \\ B = \beta \cot\omega + \dfrac{\alpha z_0}{h}, \end{cases}$$

qui restent constantes pendant le mouvement et qui vérifient la relation

$$A(\alpha^2+\beta^2)-B^2=1; \tag{9}$$

on trouve, après quelques réductions,

$$\left\{\begin{aligned} L &= \frac{1}{Ah^2}\left[\left(\frac{A\beta h}{\tau}-B\right)^2+1\right],\\ M &= -\frac{1}{\tau}\left(\frac{A\beta h}{\tau}-B\right),\\ N &= \frac{Ah^2}{\tau^2},\\ LN-M^2 &= \frac{1}{\tau^2}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

D'autre part, la valeur de dS^2 prend la forme

$$dS^2 = du^2 + L\,ds^2[(u-u_0)^2+p^2], \tag{11}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= \frac{M}{L},\\ p &= \frac{\sqrt{LN-M^2}}{L} = \frac{1}{L\tau}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

La comparaison de cette valeur de dS^2 avec celle de l'Ouvrage de M. Darboux conduit aux conclusions suivantes :

1° u_0 désigne la distance du point G au point central de la génératrice et, par suite, la première des équations (12) est celle de la ligne de striction de la surface;

2° p désigne le paramètre de distribution ([1]);

3° La variable v de M. Darboux est liée à l'arc s par la relation

$$dv = ds\sqrt{L},$$

où la seule fonction de s est la torsion $\frac{1}{\tau}$, puisque A, B, β et h restent constantes pendant le déplacement.

Les formules précédentes vont nous permettre de démontrer la propriété

([1]) Dans l'Ouvrage de M. Darboux u_0 et p sont désignées respectivement par α et β (*voir* IIIe Partie, p. 305).

essentielle des surfaces considérées, qui consiste dans la proposition dont voici l'énoncé :

7. Théorème. — *La surface réglée engendrée par toute droite* Σ *peut être déformée, avec conservation des génératrices, en une surface de M. Bertrand, de telle sorte que les deux courbes de cette nouvelle surface admettant les génératrices pour normales principales sont les transformées des trajectoires des points* G *et* G′ *où* Σ *rencontre* D *et* D′.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur le résultat suivant trouvé par Bour et rappelé par M. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIIe Partie, p. 309).

Il existe toujours une déformation d'une surface gauche telle que ses génératrices rectilignes deviennent les normales principales d'une de leurs trajectoires orthogonales arbitrairement choisie ([1]). Pour que ses génératrices puissent devenir les normales principales de *deux* de ces trajectoires, en d'autres termes, pour que la surface puisse être déformée en une surface réglée de M. Bertrand, il faut et il suffit que l'on ait entre u_0 et p une relation de la forme

$$(u_0 - m)^2 + (p - n)^2 = q,$$

m, n, q étant des constantes.

A cet énoncé, on doit ajouter que, si la condition précédente est satisfaite, les valeurs de u fournissant les trajectoires orthogonales qui se transforment ainsi en courbes de M. Bertrand sont données par les équations

$$u_1 + u_2 = 2m,$$
$$u_1 u_2 = m^2 + n^2 - q.$$

Dans le cas actuel les valeurs de u_0 et p (12) conduisent, par l'élimination de τ, à la relation demandée

$$u_0^2 + p^2 + \frac{h}{\beta}(u_0 + \mathrm{B}p) = 0,$$

d'où l'on déduit la première partie de la proposition. En outre,

$$u_1 + u_2 = -\frac{h}{\beta},$$
$$u_1 u_2 = 0.$$

([1]) La détermination de la surface transformée exige l'intégration d'une équation de Riccati (Darboux, *loc. cit.*, p. 308).

L'une des valeurs, u_1 par exemple, étant nulle, on voit que l'une des trajectoires qui se transforment en courbes de M. Bertrand, est la ligne décrite par le point G. Par analogie, l'autre trajectoire doit être le lieu du point G', comme le montre, d'ailleurs, la valeur de $u_2 = -\frac{h}{\beta}$. Toutes les parties de la proposition sont donc établies.

8. Ce résultat peut être obtenu autrement. Je vais d'abord faire voir que, pendant le mouvement, les plans tangents à la surface réglée en G et G' sont invariablement liés au système mobile et, par suite, qu'ils forment entre eux un angle constant. A chaque instant, en effet, ces plans tangents sont déterminés par la droite GG' et les déplacements des points G et G'. Comme ces déplacements sont normaux à GG', l'angle θ des plans tangents est le même que celui des tangentes aux trajectoires des points G et G'. On obtient les directions de ces tangentes en faisant successivement $u = 0$, $u = -\frac{h}{\beta}$ dans les formules donnant les Δ du point M. On en déduit que les cosinus directeurs de la tangente à (G) en G sont proportionnels à

$$\cot\omega, \quad -\frac{z_0}{h}, \quad 1,$$

de telle sorte, comme nous l'avions annoncé, que cette tangente est invariablement liée à la figure mobile. Pareillement, on trouve que les cosinus directeurs de la tangente à (G') en G' sont proportionnels à

$$\beta, \quad -\alpha, \quad 0.$$

Conséquemment, eu égard aux valeurs de A et B,

$$\cos\theta = \frac{\beta\cot\omega + \frac{\alpha z_0}{h}}{\sqrt{\cot^2\omega + \frac{z_0^2}{h^2} + 1}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{B}{\sqrt{1+B^2}}.$$

Par suite, on a la relation

$$B = \cot\theta,$$

qui donne l'interprétation géométrique de l'auxiliaire B et, ensuite, celle

de A, puisque, d'après (8),

$$A = \frac{1 + B^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sin^2\theta \sin^2\varphi},$$

φ désignant l'angle de GG′ avec OZ.

La constance de l'angle de ces plans tangents ou de ces déplacements peut aussi se déduire de ce que le plan normal à (G) en G passe par la droite D′, et que le plan (G′, D) est pareillement normal à la trajectoire de G′. Ces plans normaux sont ainsi invariablement liés à lafigure mobile. Leur angle est donc constant et, d'ailleurs, il est égal à θ.

Ceci posé, on sait qu'on peut déformer la surface réglée primitive de manière que les nouvelles génératrices rectilignes, étant les transformées de celles de la surface proposée, soient aussi les normales principales de la transformée de (G). Dans cette déformation, les angles formés par les plans tangents le long d'une même génératrice ne changent pas. Il s'ensuit que la transformée de (G′) admettra aussi les nouvelles génératrices pour normales principales et sera ainsi la conjuguée de la transformée de (G), puisque l'angle des plans tangents, le long de ces transformées, aura la même valeur constante θ que pour les courbes (G) et (G′).

On voit, de plus, que le rayon de courbure R et le rayon de torsion T de l'une de ces transformées sont liés par l'équation

$$\frac{\sin\theta}{R} + \frac{\cos\theta}{T} = \frac{\sin\theta}{l},$$

l désignant la distance $GG' = -\frac{h}{\beta}$, puisque θ est la valeur constante de l'angle formé, après la déformation, par les plans osculateurs des transformées de courbes (G) et (G′). Cette relation prend la forme

$$\frac{1}{R} + \frac{B}{T} = -\frac{\beta}{h},$$

qui conduit à quelques conséquences intéressantes.

1° Considérons l'hyperboloïde H, lieu des droites d'intersection des plans rectangulaires passant par D et D′. Toute droite de cet hyperboloïde appartenant à un autre système que D et D′ rencontre ces deux droites. Elle est, par suite, une ligne Σ. Pour cette ligne on a

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

ou encore

$$B = 0.$$

Dès lors, les transformées des courbes décrites par les points où cette droite rencontre D et D′ sont des courbes à courbure constante.

2° Pour obtenir des courbes dont les transformées soient des hélices, c'est-à-dire des lignes dans lesquelles le rapport des courbures soit constant, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $\beta = 0$, c'est-à-dire que la droite Σ soit parallèle à la bi-normale OZ en étant située dans le plan rectifiant, puisqu'elle doit rencontrer D′. Dans ce cas, la surface réglée de M. Bertrand, transformée de celle qui est engendrée pendant le mouvement, est un hélicoïde gauche à plan directeur.

On voit enfin qu'il n'existe pas de transformée à torsion constante, car l'angle θ formé par deux plans passant par D et D′ ne peut être nul. Cette conclusion résulte aussi de ce que les points G et G′ ne peuvent se confondre.

9. Lorsque le point G′ vient en O ou le point G en O′, les courbes (G′) ou (G) se confondent avec (O) ou (O′) et sont, par suite, des courbes de M. Bertrand. On peut se demander si ces courbes particulières sont les seules de cette catégorie parmi les trajectoires des points des droites D et D′.

Nous allons faire voir qu'en général tout point de D, autre que O′, ou tout point de D′, autre que O, engendre une ligne pour laquelle il n'existe pas de relation linéaire entre les courbures. A cause du rôle identique des lignes D et D′, il suffira de le vérifier pour l'une d'elles.

Soit, par exemple, un point G de D dont la cote z_0 ne soit pas nulle, et cherchons à déterminer les éléments des courbures de sa trajectoire (G).

Nous avons vu que les cosinus directeurs de la tangente à (G) en G sont proportionnels aux quantités

$$\cot\omega, \quad -\frac{z_0}{h}, \quad 1.$$

Il en résulte que l'équation du plan normal est



$$X\cot\omega - \frac{z_0}{h}Y + Z = 0,$$

ce qui permet de vérifier que ce plan normal contient D′.

La caractéristique de ce plan normal, c'est-à-dire la droite polaire de G, sera représentée par l'équation précédente jointe à celle-ci

$$z_0\left(\frac{1}{h} - \frac{\cot\omega}{\tau}\right)X + \left(\cot\omega - \frac{h}{\tau\sin^2\omega}\right)Y - \frac{z_0}{\tau}Z - h\cot\omega = 0,$$

obtenue par la méthode ordinaire. Or, ce second plan est perpendiculaire au premier, comme on le voit immédiatement.

Donc :

1° Le rayon de courbure ρ_1 de (G) en G est égal à la distance de G à ce second plan, ce qui donne, après quelques réductions,

$$\rho_1 = \frac{h\left(\cot\omega - \frac{Ah}{\tau}\right)}{\sqrt{A\left(\frac{h}{\tau\sin\omega} - \cos\omega\right)^2 + \frac{z_0^2}{h^2}\sin^2\omega}};$$

2° Les équations de la normale principale, qui se confond, dans ce cas, avec la perpendiculaire abaissée de G sur le second plan, sont

$$\frac{X}{z_0\left(\frac{1}{h} - \frac{\cot\omega}{\tau}\right)} = \frac{Y - h}{\cot\omega - \frac{h}{\tau\sin^2\omega}} = -\frac{Z - z_0}{\frac{z_0}{\tau}}.$$

Ces dernières équations montrent que la normale principale est distincte de GG′ et, même, qu'elle n'est pas invariablement liée au trièdre mobile, car le point où elle coupe le plan zOx change pendant le mouvement, puisque les coordonnées dépendent de τ qui varie avec s.

De plus, dans le calcul de la torsion τ_1 de (G), la dérivée de τ s'introduirait évidemment et, par suite, il n'existe pas, généralement du moins, de relation indépendante de τ entre ρ_1 et τ_1. *A fortiori*, il n'y a pas de relation linéaire entre les courbures $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\tau_1}$ de la ligne (G).

10. Les équations (10), (11), (12), (13) définissent deux des trois fonctions nécessaires et suffisantes pour déterminer la forme de la surface réglée étudiée (¹). Il reste à calculer la troisième fonction que M. Darboux désigne par V et qui est la courbure géodésique de l'indicatrice sphérique du cône directeur.

(¹) *Voir* M. Darboux, *loc. cit.*, p. 307.

Le résultat que l'on trouve n'est pas assez simple pour qu'il y ait quelque intérêt à le développer. Je me bornerai, ce qui est le seul point important, à donner cette valeur de V pour la surface réglée de M. Bertrand transformée de la première, en m'appuyant, d'une part, sur ce que les transformées des lignes (G) et (G') sont des asymptotiques de la nouvelle surface et, d'autre part, sur ce que l'équation différentielle des asymptotiques d'une surface réglée est, eu égard à la notation employée [1],

$$2p\frac{du}{dv} - u\frac{dp}{dv} - p\frac{du}{dv} - u\frac{dp}{dv} - V[(u - u_0)^2 - p^2] = 0.$$

Dans le cas présent, une des lignes asymptotiques de la surface transformée correspond à la valeur $u = 0$. Par suite, la valeur de la fonction V, relative à cette dernière surface, sera fournie par l'équation

$$V = -\frac{u\dfrac{dp}{dv} - p\dfrac{du}{dv}}{u^2 - p^2} = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{d}{ds}\left(\text{arc tang}\frac{u_0}{p}\right),$$

puisque

$$dv = ds\sqrt{L}.$$

En vertu des formules (12) et (13) et des valeurs (10) de M et de L, on trouve aisément que

(13) $$V = -\frac{\beta\left(\frac{1}{\tau}\right)'}{hL^{\frac{3}{2}}},$$

où $\left(\frac{1}{\tau}\right)'$ désigne la dérivée de $\frac{1}{\tau}$ prise par rapport à s.

En particulier, cette formule s'applique à la surface réglée engendrée par la normale Oy commune aux deux courbes conjuguées (O) et (O'), en introduisant les hypothèses

$$\alpha = \gamma = 0, \qquad z_0 = 0, \qquad \beta = 1,$$

car cette surface est une surface réglée de M. Bertrand.

11. Nous étudierons maintenant le cas particulier où la courbe (O) est à torsion constante, cas dans lequel les équations des numéros précédents ne conviennent pas.

---

(1) DARBOUX, *loc. cit.*, p. 308.

Lorsque la courbe (O) a une torsion constante τ, nous avons vu (n° 5) que toutes les droites Σ rencontrent la bi-normale Oz en un point G dont la cote z_0 est telle que

$$z_0 = a\tau;$$

et, puisque a est manifestement égal au rapport des cosinus directeurs α et β, on a la relation

$$z_0 = \tau\frac{\alpha}{\beta}.$$

Les équations instantanées d'une droite Σ sont alors les suivantes

$$\begin{aligned} x &= \alpha u, \\ y &= \beta u, \\ z &= z_0 + \gamma u, \end{aligned}$$

les quantités α, β et z_0 vérifiant la relation ci-dessus.

Les projections du déplacement du point M de cette droite, tel que $GM = u$, sont, d'après les formules (A),

$$\Delta \text{ de M} \quad \left\{\begin{aligned} \Delta X &= \alpha\, du + \left(1 - \frac{\beta u}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y &= \beta\, du + \left[u\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right) - \frac{\alpha}{\beta}\right] ds, \\ \Delta Z &= \gamma\, du + \frac{\beta u}{\tau}\, ds. \end{aligned}\right.$$

Dès lors le carré de l'élément linéaire de la surface réglée aura pour expression

$$dS^2 = du^2 + ds^2(Lu^2 - 2Mu + N),$$

ou

$$(14) \qquad dS^2 = du^2 + L\, ds^2[(u - u_0)^2 + p^2],$$

en posant d'abord

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} L &= \beta^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) + \left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right)^2, \\ M &= \frac{\beta}{\rho} + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right), \\ N &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit comme ci-dessus,

$$LN - M^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

et ensuite

$$(16)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{M}{L}, \\ p = \dfrac{\sqrt{LN - M^2}}{L} = \dfrac{1}{L\rho}. \end{cases}$$

Dans ces formules, la courbure $\frac{1}{\rho}$ est la seule quantité qui varie pendant le mouvement. La première des équations (16) représente la ligne de striction de la surface réglée, et la seconde fournit le paramètre de distribution.

Le théorème général du n° 7 s'applique à ce cas, car l'élimination facile de ρ, entre les équations (16), conduit à la relation

$$u_0^2 + p^2 - \frac{p\rho}{\beta}(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Donc, la surface réglée engendrée par toute droite Σ est applicable sur une surface réglée de M. Bertrand. D'après ce qui a été rappelé au n° 7, les trajectoires orthogonales qui se transforment en courbes de cette même dénomination sont définies par les relations

$$u_1 + u_2 = 0,$$
$$u_1 u_2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Il en résulte que ces deux courbes se confondent en une seule qui est la trajectoire du point G. Les courbes transformées, qui sont des courbes de M. Bertrand conjuguées, se confondent et, conséquemment, sont des courbes à torsion constantes, ce qui était à prévoir, puisque dans le cas actuel les droites D et D' coïncident.

12. On reconnaît, d'ailleurs, que la trajectoire de G n'est pas, elle-même, une courbe à torsion constante, et que la surface primitive n'est pas non plus une surface de M. Bertrand, en supposant, bien entendu, que G soit distinct de O.

Effectivement, le plan normal à (G) en G a pour équation

$$\beta X - \alpha Y = 0,$$

et sa caractéristique, droite polaire de la courbe, est définie par l'équation précédente jointe à celle-ci

$$\alpha\frac{X}{\rho}+\beta\frac{Y}{\rho}-\alpha\frac{Z}{\tau}-\beta=0,$$

qui représente un plan perpendiculaire au premier. Donc, le rayon de courbure ρ_1 de (G) est la distance de G au second plan, savoir,

$$\rho_1=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta\tau\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\rho^2}+\frac{\alpha^2}{\tau^2}}};$$

et les équations de la normale principale, qui est aussi la perpendiculaire abaissée de G sur ce plan, sont

$$\frac{X}{\frac{\alpha}{\rho}}=\frac{Y}{\frac{\beta}{\rho}}=\frac{Z-z_0}{-\frac{\alpha}{\tau}}.$$

Cette droite change pendant le mouvement. Elle ne se confond pas conséquemment avec la droite Σ. De plus, il est manifeste que, dans le calcul de la torsion τ_1, de G, la dérivée de ρ s'introduira et, par suite, la relation entre $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\tau_1}$ ne sera pas, généralement du moins, indépendante de la fonction ρ et, *a fortiori*, ne sera pas linéaire.

13. Dans le cas particulier où la droite Σ est parallèle à la bi-normale, elle doit être située dans le plan rectifiant ainsi qu'on peut s'en rendre compte directement.

En effet, si l'on désigne par x_0 et y_0 les coordonnées du pied H, sur le plan xOy, d'une droite L parallèle à Oz, et par u la distance HM comptée de cette droite, les coordonnées du point M auront pour valeurs

$$x=x_0,\qquad y=y_0,\qquad z=u,$$

et les projections de son déplacement sur les axes instantanés seront (dans l'hypothèse où le point M se meut aussi sur L)

$$\Delta \text{ de M}\quad\begin{cases}\Delta X=\left(1-\frac{y_0}{\rho}\right)ds,\\ \Delta Y=\left(\frac{x_0}{\rho}-\frac{u}{\tau}\right)ds,\\ \Delta Z=du+\frac{y_0}{\tau}ds.\end{cases}$$

On en déduit l'expression de dS^2 pour la surface réglée engendrée par L. Pour que la droite L soit normale aux trajectoires de ses différents points, il faut que le coefficient de $du\,ds$ soit nul; c'est-à-dire, comme nous l'avions annoncé, que l'on ait $y_0 = 0$, ou bien encore que la droite L soit située dans le plan xOz.

Si cette condition est remplie, on a

$$dS^2 = du^2 + \frac{ds^2}{\tau^2}\left[\left(u - \frac{\tau x_0}{\rho}\right)^2 + \tau^2\right],$$

d'où

$$u_0 = \frac{\tau x_0}{\rho},$$
$$p = \tau.$$

On en déduit que la surface réglée, engendrée par une droite Σ parallèle à la bi-normale de la courbe à torsion constante donnée et située dans le plan rectifiant, est telle que son paramètre de distribution a une valeur constante égale au rayon de torsion, et que la ligne de striction de cette surface réglée appartient à la développable enveloppe du plan rectifiant de (O).

14. La valeur de la fonction V relative à la surface transformée est toujours déduite de la formule

$$V = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{d}{ds}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{u_0}{p}\right)$$

qui donne, pour le cas où la droite Σ rencontre Oz à distance finie,

$$(17) \qquad V = \frac{\beta\left(\frac{1}{\rho}\right)'}{\tau L^{\frac{3}{2}}},$$

et, pour le cas particulier examiné en dernier lieu,

$$(17)' \qquad V = -\frac{\tau x_0 \rho'}{x_0^2 + \rho^2},$$

les dérivées $\left(\frac{1}{\rho}\right)'$ et ρ' étant prises par rapport à s.

15. Nous terminerons par l'étude du cas où le rapport des courbures

de (O) est constant, ce qui revient à dire que cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre arbitraire.

D'après ce qui a été dit au n° 5, les équations d'une droite Σ peuvent alors s'écrire

$$x = l,$$
$$y = \beta u,$$
$$z = l \operatorname{tang} \mu + \gamma u,$$

$\alpha = 0$, β, γ désignant encore les cosinus directeurs de Σ, u la distance G′M du point $M(x, y, z)$ de la droite au point G′ où elle rencontre la droite D′ qui se confond, comme on sait, avec la caractéristique du plan rectifiant.

Dans ce cas, la courbe (G′) n'est autre évidemment que l'hélice (O) déplacée parallèlement aux génératrices du cylindre qui la contient, et toutes les droites Σ aboutissant au même point G′ de D′ sont les normales de (G′).

On a, pour les projections du déplacement d'un point quelconque M de Σ,

$$\Delta \text{ de M} \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta X &= \left(1 - \frac{\beta u}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y &= \beta\, du - \frac{\gamma u}{\tau} ds, \\ \Delta Z &= \gamma\, du + \frac{\beta u}{\tau} ds, \end{aligned} \right.$$

puisque $\operatorname{tang}\mu = \frac{\tau}{\rho}$. Conséquemment, le carré de l'élément linéaire de la surface réglée engendrée par Σ a pour valeur

$$(18) \qquad dS^2 = du^2 + ds^2(Lu^2 - 2Mu + N) = du^2 + L\,ds^2[(u - u_0)^2 + p^2];$$

en posant d'abord

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2}(\beta^2 \operatorname{tang}^2\mu + 1), \\ M &= \frac{\beta}{\tau} \operatorname{tang}\mu, \\ N &= 1, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit, comme dans le cas général,

$$LN - M^2 = \frac{1}{\tau^2}.$$

On en déduit l'expre
Pour que la droite I.
il faut que le coefficie
annoncé, que l'on a
dans le plan xOz.
Si cette condition ... On voit de

d'où

... surface décrite
... Σ ... soit parallèle
... distincte de la

On en déduit
à la bi-normale
plan rectifiant.
constante égale
surface réglée
de (O).

... applicable sur
... normales
... asymptotique
... l'angle μ' sous
... contient soit

14. La val
jours déduite

... de (G) ou
... par les mêmes

qui donne, p

... d'une part, que

(17)

et, pour le

(17)

les dérivé

15. V



qui convient à la surface réglée engendrée par Oy, en supposant que μ devienne égal à μ', le rayon de torsion τ conservant la même valeur que pour (O).

Dans le cas où (O) est une hélice, la valeur de V relative à la surface de M. Bertrand transformée de celle qui est engendrée par une droite Σ, savoir

$$V = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{d}{ds}\left(\text{arc tang} \frac{u_0}{p}\right),$$

devient $V = 0$, puisque le rapport $\frac{u_0}{p}$ est constant.

Le cône directeur de la surface transformée se réduit à un plan, ce qui pouvait être prévu, attendu que cette surface transformée est engendrée par les normales principales d'une hélice.

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

DONT L'INTÉGRALE EST DE LA FORME

$$h(x)[y-g_1(x)]^{\lambda_1}[y-g_2(x)]^{\lambda_2}\ldots[y-g_n(x)]^{\lambda_n}=\mathrm{C},$$

PAR M. P. PAINLEVÉ,

Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris.

1. Dans mes recherches sur les équations du premier ordre dont l'intégrale ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, j'ai été amené à m'occuper des équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\mathrm{P}(y,x)}{\mathrm{Q}(y,x)}\equiv\frac{a_p y^p+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_0}{y^q+b_{q-1}y^{q-1}+\ldots+b_0}$$

(où les a, b sont des fonctions analytiques quelconques de x), dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme

$$(2)\qquad \mathrm{C}=h(x)[y-g_1(x)]^{\lambda_1}\ldots[y-g_n(x)]^{\lambda_n}\equiv\mathrm{F}(y,x);$$

les g et h sont certaines fonctions de x, les λ des constantes numériques et C la constante d'intégration, [les $g(x)$ sont, bien entendu, supposés distincts]. Une Note récente de M. Korkine (*voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 26 mai 1896) me donne l'occasion de rassembler les résultats un peu épars que j'ai obtenus sur cette classe d'équations (¹).

Je rappelle d'abord quelques définitions et résultats bien simples, mais qui jouent dans la suite un rôle fondamental.

(¹) *Voir* mon *Mémoire sur les équations du premier ordre,* Chap. V; les *Comptes rendus* du 18 janvier 1892 et de juin, juillet 1896; enfin mes *Leçons de Stockholm* (octobre 1895), 10 et 11ᵉ Leçons.

Observons que, quand on a effectué préalablement sur y une transformation homographique à coefficients numériques quelconques, $\Sigma\lambda$ est nul, p est égal à $q+2$, q égal à $n-2-s$; enfin $y=\infty$ n'est pas solution de (1) du moment que (1) ne se réduit pas à $y'=0$.

3. Quand l'intégrale de (1) est de la forme (2), le binome $P\,dx - Q\,dy$ admet, d'après cela, le *multiplicateur* $\dfrac{\alpha S(y,x)}{(y-g_1),\ldots,(y-g_n)} \equiv M(y,x)$, où le degré du numérateur αS est *au plus égal à* $n-1-r$, et où S n'est divisible par aucun des facteurs $y-g_i$. Si le binome $P\,dx - Q\,dy$ admet deux multiplicateurs *distincts* (¹) M et M_1 qui soient des fractions rationnelles en y, le quotient $\dfrac{M}{M_1}$ est une intégrale première de (1) et en même temps une fraction rationnelle en y, soit $R(y,x)$. On a donc

$$R(y,x) = \text{const.},\tag{7}$$

et cette égalité montre que $y(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles.

Quand il en est ainsi, on peut toujours supposer la forme (7) *irréductible;* autrement dit, si ν désigne le nombre de valeurs de $y(x)$ qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, il est loisible de donner à l'intégrale la forme

$$\rho(y,x) = c,\tag{8}$$

où ρ est une fonction rationnelle en y de degré ν. Toutes les formes (7) s'obtiennent alors en prenant pour R une fonction *rationnelle* quelconque de ρ, soit $R=\varphi(\rho)$. Toutes les formes *irréductibles* de l'intégrale s'obtiennent en effectuant sur ρ une transformation homographique à coefficients numériques (*voir* mon *Mémoire sur les équations du premier ordre,* Chap. I). Toutes les formes (2) de l'intégrale s'obtiennent en prenant pour F

$$F = \gamma(\rho-\alpha_1)^{\mu_1}(\rho-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(\rho-\alpha_j)^{\mu_j},\tag{9}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \mu_1, \ldots, \mu_j, \gamma$ étant des constantes numériques arbitrairement choisies (²).

(¹) J'entends : qui ne diffèrent pas seulement par un facteur *constant.*

(²) Soit, en effet, x_0 une valeur de x pour laquelle les déterminations considérées des coefficients de ρ et de F sont holomorphes; soit y_1^0 une valeur d'une intégrale $y_1(x)$ pour

constantes numériques inconnues, les g_j, h des fonctions inconnues de x; 2° quand il en est ainsi, calculer les g_i, h en fonction des coefficients de (1).

Quand l'intégrale de (1) peut se mettre sous la forme (2), le binome $P\,dx - Q\,dy$ admet un multiplicateur M de la forme

$$\frac{\alpha(x)\,S(y,x)}{(y-g_1)\ldots(y-g_n)} \equiv \frac{\alpha(x)\,S(y,x)}{N(y,x)},$$

où S est un polynome en y de degré $(n-r-1)$ au plus, dont aucune racine ne coïncide avec $y=g_1$ ou $y=g_2$, ..., $y=g_n$. Inversement, s'il existe un tel multiplicateur M (où les n fonctions g_i sont distinctes), l'intégrale de (1) se laisse mettre sous la forme (2). En effet, considérons la différentielle totale exacte

$$J = \frac{\alpha S}{N(y,x)}(P\,dx - Q\,dy).$$

Pour x constant, l'intégrale $\int \frac{\alpha S Q\,dy}{N(y,x)}$ peut s'écrire

$$\int\left[\frac{\lambda_1}{y-g_1} + \frac{\lambda_2}{y-g_2} + \ldots + \frac{\lambda_n}{y-g_n}\right]dy = \Sigma\lambda_i \log(y-g_i) + \varphi(x).$$

Je dis que les λ_i sont des constantes numériques; en effet, si λ_1, par exemple, dépendait de x, on aurait

$$\frac{d\lambda_1}{dx}\log(y-g_1) + \psi(y,x) \equiv -\frac{\alpha SP}{N},$$

ψ désignant une fonction de y rationnelle pour $y=g_1$, égalité absurde si $\frac{d\lambda_1}{dx}$ n'est pas nul. Il suit de là que J est de la forme

$$\Sigma\lambda_i \log(y-g_i) + \varphi(x),$$

et l'égalité $e^J =$ const. donne, en posant $h = e^{\varphi}$,

$$h(x)(y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n} = C,$$

les λ étant des constantes.

Pour que l'intégrale de l'équation (1) se laisse mettre sous la forme (2),

[illegible] M. [illegible] savoir

[illegible] un

[illegible] *[illegible]ctes*

[illegible] on

[illegible] tions

[illegible] effi-

[illegible] sait re-

[illegible]

[illegible] ainsi,

[illegible] dis-

[illegible] ltipli-

[illegible] re-

[illegible] ction

[illegible] des

[illegible] est

[illegible]

[illegible] ation

[illegible] la

[illegible] et

[illegible]

[illegible] ltiplica-

[illegible] re fini

[illegible] autour des [illegible]. On sait

[illegible] à *l'aide d'un* [illegible], si l'in-

tégrale générale $y(x)$ d'une équation (1) donnée ne prend qu'un nombre *donné* ν de valeurs autour des points critiques mobiles, et *ramener, dans ce cas, l'équation à une équation de Riccati*

$$\frac{du}{dx} = \alpha u^2 + \beta u + \gamma \tag{11}$$

par une transformation

$$u = \frac{y^\nu + A_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + A_1 y}{B_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + B_1 y + 1} \equiv L(y, x), \tag{12}$$

les A, B, α, β, γ s'exprimant *rationnellement* en fonction des coefficients de (1) (et de leurs dérivées) [1].

En définitive, *on sait reconnaître algébriquement si l'intégrale d'une équation* (1) *donnée peut se mettre sous la forme* (2) *où l'entier n est donné, et la détermination des fonctions g_i, h dépend soit d'une quadrature, soit d'une équation de Riccati.*

Observons que les g_i s'obtiennent *algébriquement* et h par une *quadrature,* à moins que l'intégrale ne puisse se mettre sous une forme (2), *où tous les exposants λ soient des entiers (positifs ou négatifs).*

5. *Remarques.* — Complétons ce théorème par quelques remarques : tout d'abord, *quand l'intégrale de* (1) *peut se mettre sous une forme* (2) *où tous les λ sont distincts, les g_i se calculent algébriquement en fonction des coefficients de* (1) (*et de leurs dérivées*), *à moins que l'équation* (1) *ne soit une équation de Riccati.*

La chose résulte de ce qui précède si la forme (2) est irréductible à une forme (2)' où les λ soient des entiers. Supposons, au contraire, que l'intégrale de (1) puisse se mettre sous la forme

$$\rho(y, x) = c,$$

où ρ est rationnel en y; toutes les formes (2) se déduisent d'une forme irréductible, soit $\rho = c$, par une transformation

$$F = \gamma(\rho - \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (\rho - \alpha_j)^{\mu_j},$$

les α, μ, γ étant des constantes. Soit ν le degré de ρ en y; il est loisible de

---

[1] *Voir* mon *Mémoire sur les équations du premier ordre* (Chap. V).

supposer que le numérateur et le dénominateur de ρ ont leurs ν racines finies et distinctes; si c_1 est une valeur *remarquable* de la constante, une solution de (1), soit $y_1(x)$, vérifie l'égalité $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, d'après la relation

$$L(y, x) = u = \frac{\varphi(x)c + \psi}{\varphi_1(x)c + \psi_1};$$

y_1 et la fonction u correspondante $[u(x) = L(y_1, x)]$ sont donc connues algébriquement en fonction des coefficients; il suit de là que, *s'il existe une valeur remarquable, l'équation* (1) *s'intègre par deux quadratures; s'il existe deux valeurs remarquables, par une quadrature; s'il en existe trois, l'équation* (1) *s'intègre algébriquement*. (*Voir* le Mémoire cité, p. 190-193.)

Ceci posé, ν est supérieur à 1 si l'équation (1) n'est pas une équation de Riccati. Considérons toutes les valeurs c' de c pour lesquelles les racines $y(x)$ de l'égalité $\rho = c$ sont toutes de multiplicité différente; ces valeurs sont toutes des valeurs remarquables de la constante, sauf peut-être une seule pour laquelle une racine au moins devient infinie; mais, dans ce cas, $u = \infty$ est une solution de l'équation de Riccati (11) qui se réduit à une équation *linéaire*. On connaît donc autant de solutions de l'équation (11) qu'il y a de valeurs c' distinctes. S'il y en a trois, l'équation (1) s'intègre algébriquement. S'il y en a deux, on peut faire en sorte que ce soient $c = 0$, $c = \infty$. La fonction

$$F = \gamma(\rho - \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (\rho - \alpha_j)^{\mu_j} \equiv h(x) \Pi(y - y_i)^{\lambda_i}$$

aura des exposants λ_i égaux, à moins que les constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ ne se réduisent à la seule valeur zéro. La fonction F se réduit donc à $\gamma\rho^\mu$, γ désignant une constante. D'autre part, si l'on écrit ρ sous la forme

$$k(x) \frac{[y - l_1(x)] \ldots [y - l_\nu(x)]}{[y - m_1(x)] \ldots [y - m_\varpi(x)]} \qquad (\varpi \leqq \nu),$$

les $l_1, \ldots, l_\nu, m_1, \ldots, m_\varpi$ (qui ne sont pas tous distincts) sont connus algébriquement, car les valeurs $y = l_i$ (ou $y = m_i$) vérifient l'équation (12) où l'on remplace u par la solution connue u_1 de (11) correspondant à $c = 0$ (ou par la solution u_2 correspondant à $c = \infty$). La fonction $k(x)$ est donnée moyennant la quadrature logarithmique qui achève l'intégration de l'équation de Riccati (11) dont on connaît deux solutions.

Enfin, s'il existe moins de deux valeurs c' de c, il est impossible (ν étant plus grand que 1) de donner à l'intégrale la forme (2) où tous les λ soient distincts. Nous avons donc bien démontré ce théorème :

Quand l'intégrale d'une équation donnée (1) *peut se mettre sous une forme* (2) *où tous les exposants sont distincts, les fonctions g_i se calculent algébriquement et $h(x)$ par une quadrature logarithmique. La seule équation de Riccati fait exception à ce théorème.*

Une autre conséquence des propriétés des valeurs *remarquables* de la constante est la suivante : quand l'intégrale d'une équation (1) se laisse mettre sous la forme (2), n est au moins égal à $r+1$ si $\Sigma\lambda \neq 0$ [1] et à $r+2$ si $\Sigma\lambda = 0$. *Les fonctions g, h s'obtiennent par deux quadratures au plus, sauf dans le cas où n est précisément égal à sa limite inférieure* ($r+1$ *pour* $\Sigma\lambda \neq 0$, $r+2$ *pour* $\Sigma\lambda = 0$). En effet, dès que n dépasse sa limite inférieure, il existe au moins une valeur remarquable.

6. Quand l'intégrale de (1) se laisse mettre sous la forme (2), où F n'est ni rationnel en y ni réductible à la forme rationnelle, les g_i se calculent algébriquement. S'il existe une valeur remarquable c_1, une intégrale $y_1(x)$ vérifie la relation

$$\frac{\partial \log F}{\partial y}(y, x) = 0$$

et, par suite, se calcule algébriquement. La fonction h vérifie l'égalité

$$h(x)(y_1 - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y_1 - g_n)^{\lambda_n} = c_1.$$

Convenons d'appeler fonction *quasi algébrique* des variables $x, y, \ldots, v$ toute fonction Φ qui s'exprime algébriquement en $\rho_1^{\lambda_1}, \ldots, \rho_n^{\lambda_n}$, les $\rho_1, \ldots, \rho_n$ désignant des fonctions algébriques de $x, y, \ldots, v$, les λ des constantes. Appelons de même équation *quasi algébrique* toute relation obtenue en annulant une telle fonction Φ. Quand l'intégrale d'une équation (1) se laisse mettre sous la forme $P(x, y) = \text{const.}$, où P est une fonction *quasi algébrique* de y et des coefficients de (1) (et de leurs dérivées), nous dirons que l'équation (1) s'intègre *quasi algébriquement*.

Ces définitions adoptées, proposons-nous de *reconnaître si une équation* (1) *donnée admet une intégrale première de la forme* (2) *où*

---

[1] r désigne toujours le *degré* du coefficient différentiel de (1); *voir* p. 2.

[illegible] *sans s'intégrer algébriquement ni quasi* [illegible].

[illegible] possibles, suivant que la forme (2) est irréductible [illegible] à la forme rationnelle en y. Dans le premier cas, il ne saurait [illegible] la constante, autrement l'équation (1) [illegible] algébriquement : par suite l'entier n est égal à $r+1$ ou [illegible] différent de zéro : il est donc limité. Dans [illegible] mise sous forme irréductible $\varphi(x, y) = c$, [illegible] deux valeurs remarquables de c; il est donc [illegible] les valeurs $c = 0$, $c = \infty$ il n'y a pas de valeurs remarquables [illegible]

[illegible]

[illegible] est encore égal à [illegible] 2. Nous savons donc résoudre *algébriquement* la question précédente.

En particulier, *étant donnée une équation* (1) *dont les coefficients sont algébriques en x, on sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si son intégrale $y(x, C)$, est une fonction transcendante qui ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini*, NON DONNÉ, *de valeurs*.

7. Proposons-nous, en dernier lieu, de *déterminer si l'intégrale d'une équation* (1) *donnée peut se mettre sous une forme* (2) (*où n est inconnu*) *irréductible à la forme rationnelle en y*.

Considérons d'abord une équation (1) où P et Q soient des polynomes en x, y, tels que les deux courbes $P = 0$, $Q = 0$ du plan des x, y aient toutes leurs intersections (à distance ou infinie) *distinctes*. A chaque intersection M de ces deux courbes, M. Poincaré fait correspondre un exposant σ facile à calculer ; par un tel point M il ne passe que deux courbes intégrales d'aspect algébrique, à moins que l'exposant σ ne soit un nombre réel, commensurable et positif, auquel cas M est un *nœud algébrique*. Moyennant la seule hypothèse qu'*aucun des exposants σ ne soit réel, commensurable et positif*, on peut résoudre *algébriquement* le problème précédent. En effet, il est loisible de mettre F sous la forme

$$h(x)\, p_1(x, y)^{\lambda_1} \ldots p_j(x, y)^{\lambda_j};$$

les p_i désignent des polynomes en y, dont les coefficients dépendent algébriquement de x, le premier de ces coefficients étant l'unité, et les λ sont des constantes entre lesquelles n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers. Le nombre j est au moins égal à 2; sinon, F serait réductible à la forme rationnelle. Ceci posé, je dis d'abord que les p_i sont *rationnels* en x; en effet, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, il n'existe (à un facteur constant près) qu'un seul multiplicateur $M(y, x)$ rationnel en y, soit

$$\frac{\alpha(x)[y^s + k_{s-1}(x)\, y^{s-1} + \ldots + k_0(x)]}{y^n + l_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + l_0(x)};$$

les fonctions k, l sont connues rationnellement à l'aide des coefficients de (1) et de leurs dérivées, donc sont rationnelles en x. Les racines $y = g_i(x)$ du dénominateur de M qui donnent lieu au même résidu λ de la fraction MQ en y, sont déterminées par une relation algébrique $\varpi(x, y) = 0$, où ϖ est un polynome en y dont les coefficients dépendent rationnellement des coefficients de (1), de leurs dérivées et de la constante λ. Chaque polynome p_i est un produit de tels polynomes ϖ. *Donc les p_i sont rationnels en x.*

Les deux courbes algébriques $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ par exemple (mises sous forme entière) ne peuvent se couper qu'en un des points M communs aux courbes $P = 0$, $Q = 0$. Or, par chacun de ces points M (à distance finie ou non) ne passent que deux courbes intégrales d'aspect algébrique, et l'on calcule immédiatement le nombre τ d'intersections confondues en M de ces deux branches. En faisant la somme de ces nombres τ pour tous les points M, on a une limite supérieure du nombre des points communs aux diverses courbes algébriques $p_i = 0$, donc une limite supérieure du degré en x, y de ces courbes. D'où ce théorème :

Quand aucun des exposants des points singuliers n'est un nombre réel, commensurable et positif, on sait reconnaître algébriquement si l'intégrale de (1) *se laisse mettre sous une forme* (2) *irréductible à la forme rationnelle, sans que l'entier n soit donné.*

Le même raisonnement et le même résultat subsistent évidemment si, dans l'équation (1) donnée, P et Q sont des fonctions algébriques quelconques de x, telles seulement que *l'équation* (1) *ne possède aucun nœud algébrique* (*à distance finie ou infinie*).

ce qui exige que φ soit une constante, c'est-à-dire que l'équation linéaire qui donne v se réduise à

$$\frac{dv}{dx} = \gamma(x),$$

γ étant connu rationnellement en fonction des coefficients de (1) (et de leurs dérivées).

9. Observons que quand h est égal à 1, le degré des polynômes en y

$$A = \frac{\partial \log F}{\partial y} \Pi(y - g_i),$$
$$B = \frac{\partial \log F}{\partial x} \Pi(y - g_i),$$

est au plus égal (et est égal en général) à $n - 1$. Quand $\Sigma\lambda$ est nul, le degré de A est au plus égal à $n - 2$; pour que le degré de B s'abaisse d'une unité, il faut que $\Sigma\lambda_i g'_i$ soit nul quel que soit x. Cette remarque faite, établissons ce théorème :

Étant donnée une équation (1) *où le degré en* y *de* P *est au plus égal au degré en* y *de* Q, *si cette équation admet une intégrale première de la forme* (2)', *elle s'intègre algébriquement ou par une seule quadrature.*

D'après ce qui précède, nous n'avons plus à démontrer ce théorème que dans le cas où, la quantité $\Sigma\lambda$ étant nulle, la forme (2)' est réductible à la forme $\rho(y, x) = c$, où ρ est rationnel en y. Nous pouvons remplacer, dans ce cas, les égalités (11) et (12) par les suivantes

$$\frac{y^\nu + A^1_{\nu-1}(x)\, y^{\nu-1} + \ldots + A^1_1(x)\, y}{y^{\nu-i} + B^1_{\nu-i-1}(x)\, y^{\nu-i-1} + \ldots + B^1_0(x)} = v, \qquad \frac{dv}{dx} = \beta(x) v + \gamma(x).$$

Si, dans l'équation linéaire, on remplace v en x, y, on voit aussitôt que, dans l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{B(y, x)}{A(y, x)}$ ainsi obtenue, le dénominateur est de degré $2\nu - i - 1$, le numérateur renferme un terme de la forme $\beta y^{2\nu - i}$; pour que le degré de P ne dépasse pas celui de Q, il faut donc que β soit nul, c'est-à-dire que v soit donné par l'unique quadrature $v = \int \gamma\, dx$. C. Q. F. D.

10. Démontrons, pour terminer, que *si l'intégrale d'une équation* (1) *quelconque se laisse mettre sous la forme* (2)' *où tous les* λ *sont distincts, les* g_i *s'obtiennent algébriquement, à moins que l'équation* (1) *ne soit une équation linéaire.*

La chose est démontrée si l'intégrale ne se laisse pas mettre sous la forme $\rho(y, x) = c$, où ρ est rationnel en y. Quand on se trouve au contraire dans ce cas, deux hypothèses sont possibles suivant que, dans la forme irréductible de l'intégrale $\rho(y, x) = c$, le degré ν de ρ en y est égal ou supérieur à 1.

Dans le premier cas, l'intégrale peut s'écrire

$$h(x)\frac{y - k_1(x)}{y - k_2(x)} = c,$$

et comme

$$C = C_0(c - \alpha_1)^{\mu_1}\dots(c - \alpha_k)^{\mu_k},$$

pour que F soit de la forme $\Pi(y - g_i)^{\lambda_i}$, il faut que $(h - \alpha_1)^{\mu_1}\dots(h - \alpha_k)^{\mu_k}$ soit une constante, c'est-à-dire que h soit une constante; y vérifie alors *une équation linéaire*.

Quand ν est plus grand que 1 (*voir* p. 8), l'intégrale ne se laisse mettre sous une forme (2) où tous les λ sont distincts que s'il existe au moins deux valeurs de c pour lesquelles on connaît une solution de (1); s'il en existe trois, l'équation (1) s'intègre algébriquement; s'il en existe deux, soit $c = 0$, $c = \infty$, on a

$$C = C_0 c^{\mu},$$

et puisque ρ est de la forme

$$h(x)\frac{[y - l_1(x)]\dots[y - l_\nu(x)]}{[y - m_1(x)]\dots[y - m_\varpi(x)]}, \qquad (\varpi \leqq \nu),$$

$h(x)$ doit être une constante; comme les $l(x)$, $m(x)$ sont connus algébriquement (*voir* p. 8), l'équation (1) s'intègre algébriquement. Nous avons donc bien établi que, si les λ_i dans $(2)'$ sont *tous distincts*, les g_i s'obtiennent *algébriquement*, sauf dans le cas où (1) est une équation *linéaire*.

DEUXIÈME PROBLÈME.

11. Quand on effectue sur $y(x)$ une transformation homographique dont les coefficients sont des fonctions arbitrairement choisies de x, l'équation (1) prend la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+2}\,y^{r+2} + a_{r+1}\,y^{r+1} + \dots + a_0}{y^r + b_{r-1}\,y^{r-1} + \dots + b_0};$$

d'autre part, la relation

$$(2) \qquad h(x)[y - g_1]^{\lambda_1}\dots[y - g_n]^{\lambda_n} = \text{const.}$$

garde la même forme si $\Sigma\lambda$ est nul; elle se transforme en une relation analogue où n est augmenté d'une unité et où $\lambda_{n+1} = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$, si $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ est différent de zéro.

D'après cela, posons-nous le problème suivant :

PROBLÈME (A). — *Former toutes les équations*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+2}(x)\,y^{r+2} + a_{r+1}(x)\,y^{r+1} + \ldots + a_0(x)}{y^r + b_{r-1}(x)\,y^{r-1} + \ldots + b_0(x)} \tag{1}$$

(de degré r donné) dont l'intégrale générale se laisse mettre sous la forme

$$C = h(x)[y - g_1]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n]^{\lambda_n} \equiv F(y, x). \tag{2}$$

où l'entier n est donné, ainsi que les exposants λ, *dont la somme est nulle.*

Tout d'abord, n est au moins égal à $r + 2$. Plus généralement (*voir* p. 2), soit s la somme $\Sigma(l_i - 1)$, où $l_1, \ldots, l_k$ désignent l'ordre de multiplicité des intégrales remarquables $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, (y_1 pouvant être l'∞); on a

$$n = r + 2 + s.$$

Pour qu'il existe une intégrale remarquable d'ordre l, $l - 1$ conditions sont nécessaires entre h et les g; il faut :

1° Que le polynome en y

$$\begin{aligned} A(y) &= (y - g_1)\ldots(y - g_n)\frac{\partial}{\partial y}\log F \\ &\equiv \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i [y - g_1]\ldots[y - g_{i-1}][y - g_{i+1}]\ldots[y - g_n] \end{aligned}$$

ait une racine multiple d'ordre $l - 1$, soit $y = y_1$, d'où $l - 2$ conditions *algébriques* obtenues en éliminant y_1 entre les équations

$$A(y_1) = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial y}(y_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{l-2} A}{\partial y^{l-2}}(y_1) = 0;$$

2° Que cette racine multiple soit une intégrale remarquable, c'est-à-dire qu'on ait

$$h(x)(y_1 - g_1)^{\lambda_1}\ldots(y_1 - g_n)^{\lambda_n} = C_1 \tag{3}$$

[d'où une relation *quasi algébrique* entre h et les g, obtenue en tirant y_1 de $A(y_1) = 0$ pour porter dans (3)].

D'après cela, considérons un système quelconque d'*entiers positifs* dont la somme soit égale à $n-r-2$. A chacun de ces systèmes, soit $l_1-1, \ldots, l_k-1$ ou L_k, correspond un type d'équations (1) répondant à la question : ce type s'obtient en prenant pour h et les g des fonctions de x qui satisfont : 1° à $n-r-2-k$ relations algébriques (S) qui expriment que $A(y)$ possède k racines distinctes de multiplicité $l_1-1, \ldots, l_k-1$; 2° à k relations quasi algébriques (S′) qui expriment que ces k racines sont des intégrales remarquables; ces dernières renferment chacune une constante arbitraire $C_1, \ldots, C_k$. Ces $(n-r-2)$ relations (S), (S′) définissent les $(n+1)$ fonctions indéterminées $h, g_1, \ldots, g_k$ à l'aide de $(r+3)$ d'entre elles arbitrairement choisies et des k constantes $C_1, \ldots, C_k$ (dont on peut toujours supposer la première égale à l'unité). Comme les coefficients a, b de (1) s'expriment rationnellement en fonction des h, g_i, $\frac{dh}{dx}$, $\frac{dg_i}{dx}$, on voit que les coefficients des équations (1) cherchées se calculent en fonctions de $(r+3)$ fonctions arbitraires, de leurs dérivées premières et de $k-1$ constantes.

En définitive, *à chaque système d'entiers positifs (soit* $l_1-1, \ldots, l_k-1$) *dont la somme est égale à* $n-r-2$, *correspond un type d'équations* (1) *cherchées qui dépend (sous forme connue) de* $r+3$ *fonctions arbitraires de* x, *de leurs dérivées premières et de* $(k-1)$ *constantes arbitraires.* On obtient *toutes* les équations (1) cherchées en épuisant *tous les systèmes d'entiers positifs dont la somme est égale à* $n-r-2$.

Nous discuterons tout à l'heure la compatibilité des relations entre les g, h. Je ferai auparavant quelques remarques.

Si l'on exprime que $A(y)$ est divisible par *le dénominateur* $Q(y, x)$ du coefficient différentiel de (1), on obtient r nouvelles relations algébriques entre h, les g (et les b), relations où les dérivées des h, g ne figurent pas. Ces relations, jointes au système (S), (S′) (ce qui donne en tout $n-2$ relations algébriques ou quasi algébriques), définissent les $(n+1)$ fonctions $h, g_1, \ldots, g_n$ à l'aide de trois d'entre elles et de $b_{r-1}, \ldots, b_0$. *On peut donc se donner arbitrairement le dénominateur* Q *dans l'équation* (1) *cherchée,* et les coefficients du numérateur dépendent encore *de trois fonctions* (et de constantes) arbitraires.

12. Observons que quand la quantité $\Sigma\lambda$ n'est pas nulle dans l'égalité (2), $y=\infty$ est toujours une solution de (1); autrement dit, le degré du numérateur P est au plus égal à $r+1$. On aurait donc pu, au lieu du problème (A), se poser le problème suivant :

de x, et exprimons d'abord que l'expression $\Sigma \frac{\lambda_i}{y-g_i}$ est de la forme

$$\frac{c(y-y_1)^{l_1-1}\dots(y-y_k)^{l_k-1}(y-y_{k+1})\dots(y-y_{k+r})}{(y-g_1)\dots(y-g_n)}$$

(où $l_1+\dots+l_k-k+r$ est égal à $n-1$).

Nous formons ainsi n conditions

$$(\sigma)\quad (i=1,2,\dots,n),\quad \lambda_i=\frac{c(g_i-y_1)^{l_1-1}\dots(g_i-y_k)^{l_k-1}(g_i-y_{k+1})\dots(g_i-y_{k+r})}{(g_i-g_1)\dots(g_i-g_{i-1})(g_i-g_{i+1})\dots(g_i-g_n)}$$

qui entraînent la condition $\Sigma\lambda=c$, en sorte qu'on peut garder seulement les $(n-1)$ premières égalités (σ), en y faisant $c=\Sigma\lambda=1$.

Exprimons maintenant que $\Sigma\lambda_i g_i$ est une constante C_0 et que $y_1,\dots,y_k$ sont des solutions de $(1)'$. Nous formons ainsi un système total de $n+k$ équations entre les $(n+k+r)$ fonctions inconnues $g_1(x),\dots,g_n(x)$, $y_1(x),\dots,y_{k+r}(x)$, à savoir le système

$$(\tau)\quad\begin{cases}\lambda_i=\dfrac{(g_i-y_1)^{l_1-1}\dots(g_i-y_k)^{l_k-1}(g_i-y_{k+1})\dots(g_i-y_{k+r})}{(g_i-g_1)\dots(g_i-g_{i-1})(g_i-g_{i+1})\dots(g_i-g_n)}\\ \qquad\equiv\rho_i(g_1,\dots,g_n;y_1,\dots,y_{k+r}),\qquad [i=1,2,\dots,(n-1)],\\ C_0=\Sigma\lambda_i g_i=\rho_n(g_1,\dots,g_n;y_1,\dots,y_{k+r})\ ^{(1)},\\ C_j=(y_j-g_1)^{\lambda_1}\dots(y_j-g_n)^{\lambda_n}=\rho_{n+j}(g_1,\dots,g_n;y_1,\dots,y_{k+r})\\ \qquad (j=1,2,\dots,k).\end{cases}$$

Pour que la forme $(2)'$ soit l'intégrale d'une équation $(1)'$, il faut et il suffit que, les n fonctions *distinctes* $g_1,\dots,g_n$ étant substituées dans (τ), les équations ainsi obtenues entre $y_1,\dots,y_{k+r}$ soient compatibles pour certaines valeurs des constantes $C_0, C_1,\dots,C_k$.

Ceci posé, je vais montrer que les seconds membres $\rho_1,\dots,\rho_{n+k}$ des égalités (τ) sont des fonctions *indépendantes* des variables $g_1,\dots,g_n$, $y_1,\dots$, y_{k+r}.

En effet, supposons qu'un au moins des ρ soit fonction des autres, et ajoutons aux équations (τ) les r équations

$$(\theta)\quad\begin{cases}C_{k+1}=(y_{k+1}-g_1)^{\lambda_1}\dots(y_{k+1}-g_n)^{\lambda_n}=\rho_{n+k+1}(g_1,\dots,g_n;y_1,\dots,y_{k+r}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ C_{k+r}=(y_{k+r}-g_1)^{\lambda_1}\dots(y_{k+r}-g_n)^{\lambda_n}=\rho_{n+k+r}(g_1,\dots,g_n;y_1,\dots,y_{k+r}).\end{cases}$$

---

(1) ρ_n s'obtient en remplaçant, dans $\Sigma\lambda_i g_i$, λ_n par $1-(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})$, puis $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ par leurs valeurs en $g_1,\dots,g_n,y_1,\dots,y_{k+r}$. La même remarque s'applique à $\rho_{n+1},\dots,\rho_{n+k}$.

A fortiori, les $(n+k+r)$ fonctions ρ ne sont pas distinctes; admettons qu'elles soient liées par i relations et i seulement. Pour un système quelconque de constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, C_0, \ldots, C_{k,r}$, satisfaisant à ces i relations, les équations (7), (θ) en $g_1, \ldots, y_{k+r}$ se réduisent à $(n+k+r-i)$ équations distinctes et compatibles qui admettent des solutions où tous les g sont distincts et où i des fonctions $g_1, \ldots, g_n, y_1, \ldots, y_{k,r}$ sont choisies arbitrairement. Comme, d'autre part, les g_i une fois déterminés, les fonctions $y_1, \ldots, y_{k,r}$ le sont évidemment, on pourra se donner arbitrairement i des fonctions g, soit $g_1, \ldots, g_i$.

Mais quand les conditions (7), (θ) sont vérifiées, le degré r de Q dans (1) est égal à $n - 1 - (l_1 + l_2 + \ldots + l_k - k + r) = 0$; P (qui est de degré $r - 1$) est donc identiquement nul, et l'équation (1)' se réduit à $\frac{dy}{dx} = 0$. Comme cette équation doit admettre la solution $y = g_1(x)$, où g_1 est arbitrairement choisi, la conclusion est absurde. Les fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_{n+k}$ de [illegible] sont donc indépendantes. C. Q. F. D.

Il suit de là qu'en laissant de côté certaines valeurs exceptionnelles des constantes λ, C, les conditions (7) définissent $(n+k)$ des fonctions $g_1, \ldots,$ [illegible] en fonction de r des fonctions g arbitrairement choisies. [illegible] *étant donnés, à chaque système d'entiers positifs* [illegible] *égale à* $n - 1 - r$, *soit* $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$, *correspond* [illegible] (1) *cherchées qui dépend (par des relations con*[illegible]) *de r fonctions et de k constantes arbitraires.* Il ne [illegible] d'exception que pour *des valeurs singulières des exposants* λ.

[illegible] résultat fondamental auquel nous voulions arriver. Avant [illegible] faisons quelques remarques importantes.

[illegible] de quelque manière qu'on choisisse les constantes λ, C, [illegible] *distinctes ou incompatibles*. En effet, si pour un [illegible] constantes λ, C, les équations (7) se réduisent à $(n-k-i)$ [illegible] et distinctes, on peut encore ajouter à ces équations [illegible] des valeurs convenables des $C, \ldots, C_{k,r}$, le [illegible] admettrait des solutions où un au moins [illegible] que nous savons absurde.

[illegible] qu'on peut faire au raisonnement [illegible] toutes les fois que, dans l'intégrale (2),

[illegible] rapports [illegible]

[illegible] sont [illegible]

[illegible] les polynomes [illegible]

[illegible] indéfiniment [illegible]

[illegible] ne soit

[illegible] dans ce

[illegible] en fût

[illegible] polynome

[illegible] Mais toutes

[illegible] les racines

[illegible] il suit

de là qu'on devrait avoir

$$r \leqq 2\nu - j - 1 - 2\left[1 + \frac{2(\nu-3)}{3}\right] + \frac{2j}{3} - \left[\nu - 1 - \frac{\nu-3}{3}\right]$$

ou bien

$$r \leqq 1 - \frac{j}{3} < 1.$$

Nous voyons donc que, *les* λ *étant tous distincts* [1], *la forme* (2) *est nécessairement irréductible, dès que r est plus grand que* 1.

La proposition subsiste pour $r = 1$, sous la condition que non seulement *les* λ *soient tous distincts*, mais que de plus *trois quelconques des* λ *aient une somme différente de zéro*. En effet, le raisonnement précédent s'applique sans modification à l'hypothèse où, dans (α), i est égal à 1, et montre que d'ailleurs i ne saurait dépasser 2 : autrement on aurait

$$r \leqq 2 - \frac{j}{3} - \left[1 + \frac{2(\nu-3)}{3}\right],$$

c'est-à-dire

$$r \leqq 1 - \left(\frac{\mu + 2\nu - 6}{3}\right), \qquad \text{d'où} \qquad \nu \leqq 2;$$

pour $\nu = 2$, on voit aussitôt que les valeurs remarquables c_1, c_2 de c abaissent r à zéro. Enfin, si F est de la forme

$$\gamma(\rho - c_1)^{\mu_1}(\rho - c_2)^{\mu_2},$$

les trois égalités

$$\Pi_{\nu-j} = 0, \qquad \Pi_\nu - c_1\Pi_{\nu-j} = 0, \qquad \Pi_\nu - c_2\Pi_{\nu-j} = 0,$$

ne peuvent avoir chacune une racine simple sans que trois exposants λ soient égaux à μ_1, μ_2, $-(\mu_1 + \mu_2)$; il ne saurait donc exister, parmi toutes les racines en question, plus de deux racines simples, ni (pour la même raison) plus de deux racines doubles; d'où l'inégalité

$$r \leqq 1 - \frac{\mu}{3} < 1.$$

16. *Complément à la discussion précédente.* — Revenons aux $(n-1)$

---

[1] Quand plusieurs λ sont égaux, notamment quand tous les λ sont égaux, l'intégrale (2) est encore en général irréductible, mais ne l'est plus *nécessairement*.

égalités

$$(\sigma)\quad \begin{cases} \lambda_i = \dfrac{(g_i - y_1)^{l_1-1}\ldots(g_i - y_k)^{l_k-1}(g_i - y_{k+1})\ldots(g_i - y_{k+r})}{(g_i - g_1)\ldots(g_i - g_{i-1})(g_i - g_{i+1})\ldots(g_i - g_n)} \\ \quad = \rho_i(g_1, \ldots, g_n, y_1, \ldots, y_{k-r}) \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)]. \end{cases}$$

Les $(n-1)$ fonctions ρ sont, avons-nous dit, indépendantes, en sorte que les égalités (σ) permettent de tirer les $(n+k+r)$ variables $g_1, \ldots, g_n$, $y_1, \ldots, y_{k,r}$ en fonction de $k+r+1$ d'entre elles $[k+r+1 \leqq n]$ qu'on peut toujours (d'après une remarque faite) choisir arbitrairement parmi les g. Il ne peut y avoir d'exception que pour certaines valeurs exceptionnelles des λ, soit les valeurs λ', qui satisfont à certaines conditions *évidemment algébriques*.

Si l'on élimine $y_1, \ldots, y_{k-r}$ entre les $(n-1)$ équations (σ), on forme $(n-k-r-1)$ relations algébriques entre les g, soit les relations $(\sigma)'$, qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le polynome

$$A(y) = (y - g_1)\ldots(y - g_n)\sum \frac{\lambda_i}{y - g_i}$$

ait k racines distinctes multiples respectivement d'ordre $l_1, \ldots, l_k$. Ces relations définissent algébriquement les g (essentiellement distincts) en fonction de $(k+r+1)$ d'entre eux, et cela pour tout système de valeurs des exposants λ [1] (sauf peut-être pour certaines valeurs λ' vérifiant des conditions algébriques).

---

[1] On aurait pu démontrer ce résultat directement en établissant le lemme suivant :

Soit $R(y)$ un polynome donné de degré $(n-1)$ en y, $R = y^{n-1} + c_{n-2}y^{n-2} + \ldots + c_0$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des quantités données, toutes différentes de zéro et dont la somme est égale à l'unité. *On peut toujours trouver des quantités $g_1, \ldots, g_n$ distinctes* (dont une prise arbitrairement) *telles qu'on ait identiquement*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{y - g_i} \equiv \frac{R(y)}{(y - g_1)\ldots(y - g_n)}.$$

R étant donné, il ne peut y avoir d'exception que pour des valeurs des λ exceptionnelles qui vérifient certaines conditions algébriques.

Pour établir ce lemme, il suffit d'écrire les égalités

$$\lambda_i = \frac{R(g_i)}{(g_i - g_1)\ldots(g_i - g_{i-1})(g_i - g_{i+1})\ldots(g_i - g_n)} \equiv \rho_i(g_1, \ldots, g_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions ρ sont liées par la relation $\Sigma\rho_i \equiv \Sigma\lambda_i = 1$; on voit bien aisément qu'il n'existe aucune autre relation identique entre les ρ_i : d'où le théorème.

Si l'on ajoute aux relations $(\sigma)'$ la relation $\Sigma\lambda_i g_i = 0$, le système $(\sigma)''$ ainsi obtenu est un système de $(n-k-r)$ relations compatibles et distinctes (du moment que les λ n'ont pas ces valeurs λ'). En effet, quand on change y en $y+k$, les conditions $(\sigma)'$ restent vérifiées : à toute solution $g_1, \ldots, g_n$ de $(\sigma)'$ correspond donc une solution

$$\overline{g}_1 = 0, \qquad \overline{g}_2 = g_2 - g_1, \qquad \ldots, \qquad g_n = \overline{g}_n - g_1,$$

solution qui dépend de $(r+k)$ fonctions arbitraires $\overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_{r+k+1}$; la solution la plus générale de $(\sigma)'$ se déduit de la précédente en posant

$$g_1 = k, \qquad g_2 = \overline{g}_2 + k, \qquad \ldots, \qquad g_n = \overline{g_n} + k,$$

k étant arbitraire. Pour que $\Sigma\lambda g$ soit nul, il faut et il suffit que k soit égal à

$$-\frac{(\lambda_2\overline{g}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{g}_n)}{\Sigma\lambda} \equiv f(\overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_{k+r+1}),$$

Le système $(\sigma)''$ définit donc les g en fonction algébrique de $(k+r)$ d'entre eux, soient $g_1, \ldots, g_{k+r}$. Dès lors, $y_1, \ldots, y_{k+r}$ sont donnés également en fonction algébrique de $g_1, \ldots, g_{k+r}$, d'après l'identité

$$\begin{aligned} &\Sigma\lambda_i(y-g_1)\ldots(y-g_{i-1})(y-g_{i+1})\ldots(y-g_n) \\ &\quad \equiv (y-y_1)^{l_1-1}\ldots(y-y_k)^{l_k-1}(y-y_{k+1})\ldots(y-y_{k+r}). \end{aligned}$$

Si maintenant on exprime les g et $y_1, \ldots, y_{k+r}$ en $g_1, \ldots, g_{k+r}$ dans les k équations

$$C_j = (y_j - g_1)^{\lambda_1}\ldots(y_j - g_n)^{\lambda_n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

les k relations quasi algébriques

$$(\tau)' \qquad C_j = \rho'_j(g_1, \ldots, g_{k+r}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

ainsi obtenues entre les variables $g_1, \ldots, g_{k+r}$, sont résolubles par rapport à k d'entre elles, et définissent $g_{r+1}, \ldots, g_{r+k}$ en fonction de $g_1, \ldots, g_r$ et de $C_1, \ldots, C_j$. Autrement les ρ'_j ne seraient pas des fonctions indépendantes de $g_1, \ldots, g_{k+r}$, et, par suite, en ajoutant aux relations $(\tau)'$ les relations (θ) (où l'on exprime $g_1, \ldots, y_{k+r}$ en $g_1, \ldots, g_{k+r}$), on formerait un système qui, pour des valeurs convenables des constantes $C_1, \ldots, C_{k+r}$, serait compatible et indéterminé, ce que nous savons être absurde.

Ainsi donc, à tout système d'entiers positifs dont la somme est égale à

$n - r - 1$, soit $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$, correspond un type d'équations $(1)'$ dépendant de r fonctions et de k constantes arbitraires, et cela quels que soient les exposants donnés λ (pourvu qu'ils ne satisfassent pas à certaines relations algébriques, variables avec le système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$ considéré).

Quand les λ prennent les valeurs exceptionnelles λ', je dis que le système $(\sigma)'$ est *incompatible* (1). En effet, si ce système n'est pas incompatible, les équations qui le composent ne sont pas distinctes et équivalent à $(n - k - r - 1 - i)$ équations compatibles et distinctes. Il suit de là, comme on le voit aussitôt, que le système $(\sigma)'$, joint à la relation $\Sigma\lambda_i g_i = 0$, définit les quantités g et $y_1, \ldots, y_{k+r}$ en fonction $(k + r + i)$ d'entre elles, et que les égalités $(\tau)'$ et (0) entre ces $(k + r + i)$ quantités sont compatibles et indéterminées pour des valeurs convenables des constantes $C_1, \ldots, C_{k+r}$, ce qui est absurde.

Observons enfin que, pour le système L d'entiers $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$ où tous les $l_j - 1$ sont égaux à l'unité, k est égal à $n - r - 1$, et les conditions $(\sigma)'$ s'évanouissent. Il n'existe donc pas, pour ce système L, de valeurs exceptionnelles des λ.

17. *Conclusions.* — Nous sommes en état, maintenant, d'énoncer les conclusions suivantes :

Soit r un entier quelconque $(r > 0)$, *n un entier au moins égal à* $r + 1$. *Il existe une infinité d'équations* $(1)'$ *irréductibles et de degré r, dépendant de r fonctions et de* $(n - r - 1)$ *constantes arbitraires, soit*

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{r-1}(x)\, y^{r-1} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}(x)\, y^{r-1} + \ldots + b_0},$$

dont l'intégrale peut se mettre sous la forme

$$(2)' \qquad C = [y - g_1(x)]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n(x)]^{\lambda_n},$$

(1) Soient, par exemple, $n = 7$, $r = 1$, et soit L un système d'un seul entier qui, par suite, est égal à $n - r - 1 = 5$, $(k = 1)$. Pour des valeurs des λ prises au hasard, les conditions $(\sigma)'$, qui expriment que l'égalité en y

$$\frac{\partial}{\partial y} \log F = 0$$

a une racine multiple d'ordre 5, sont compatibles; mais elles sont incompatibles, par exemple, pour les valeurs $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = -1$; autrement un polynôme du quatrième degré aurait une racine sextuple.

où

$$\Sigma\lambda_i = 1, \qquad \Sigma\lambda_i g_i = 0,$$

et cela quels que soient les exposants donnés $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (¹).

La forme (2)′ est *irréductible*, sauf pour des valeurs *exceptionnelles* de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. En particulier, *la forme* (2) *est irréductible quand tous les* λ *sont distincts* (pourvu que r soit plus grand que 1).

De plus, *à tout système d'entiers positifs dont la somme est égale à* $n - r - 1$, *soit* $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$ ($l_1 > 2$), *correspondent encore une infinité d'équations* (1)′ *irréductibles et de degré* r, *dépendant de* r *fonctions et de* k *constantes arbitraires, et cela quels que soient les exposants* λ *donnés, pourvu que les* λ *ne satisfassent pas à certaines conditions algébriques* (variables avec le système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$ considéré). Pour ces valeurs exceptionnelles λ' des λ, *il n'existe pas* d'équations (1)′ de l'espèce cherchée qui correspondent au système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$. Quand les λ n'ont pas reçu de telles valeurs λ', la forme (2) de l'intégrale de (1) est encore *irréductible* en général, en particulier quand les λ sont *tous distincts* (r étant plus grand que 1).

En épuisant tous les systèmes d'entiers $l_1, \ldots, l_k$, *on obtient toutes les équations* (1)′ *dont l'intégrale se met sous la forme* (2)′.

18. La solution générale du problème (A) (*voir* p. 14) s'obtient en effectuant sur y dans les équations précédentes (1)′ *la transformation homographique* la plus générale, ce qui introduit *trois* nouvelles fonctions arbitraires. La solution la plus générale du problème (B) (*voir* p. 17) s'obtient en effectuant sur y la *transformation linéaire* la plus générale, ce qui introduit *deux* nouvelles fonctions arbitraires.

On voit notamment que, r *étant un entier donné et* ν *un entier* $\left(\textit{supérieur à } \frac{r+2}{2}\right)$ *aussi grand qu'on veut, il existe une infinité d'équations* (1) *irréductibles et de degré* r *dont l'intégrale générale* $y(x, C)$ *acquiert exactement* ν *valeurs autour des points critiques mobiles,* soit

$$(1) \qquad y' = \frac{a_{r+2}\, y^{r+2} + \ldots\ldots\ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}\, y^{r-1} + \ldots + b_0}.$$

(¹) Les coefficients de (1)′ sont donnés par des relations (quasi algébriques) explicitement connues en fonction des r fonctions inconnues, de leurs dérivées premières, et des constantes. On peut prendre $b_0, \ldots, b_{r-1}$ comme fonctions arbitraires (*voir* p. 16 et 28).

Ces équations dépendent algébriquement de $r+3$ fonctions arbitraires, de leurs dérivées premières (et de constantes dont le nombre croît avec ν indéfiniment). On peut notamment prendre $b_0, \ldots, b_{r-1}$ comme r des fonctions arbitraires, comme il ressort aisément de la remarque suivante.

Cette remarque est relative au rôle des coefficients $b_{r-1}, \ldots, b_0$ du dénominateur Q de (1)'; ces coefficients, fonctions symétriques de $y_{k+1}, \ldots, y_{k+r}$, s'expriment algébriquement en $g_1, \ldots, g_{k+r}$ (pour chaque système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$); de sorte qu'inversement on peut exprimer $g_{k+1}, \ldots, g_r$ en fonction algébrique de $g_1, \ldots, g_k, b_1, \ldots, b_r$ (*voir* la note de la p. 24). Les égalités $(\tau)'$ (p. 25) deviennent alors k égalités quasi algébriques en $g_1, \ldots, g_k, b_1, \ldots, b_r$ qui définissent $g_1, \ldots, g_k$ en fonction de $b_1, \ldots, b_r$ et des constantes $C_1, \ldots, C_k$. On voit ainsi que *les r coefficients $b_0, \ldots, b_{r-1}$ étant choisis arbitrairement, à chaque système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$ correspond un type* (1)' *qui dépend de k constantes arbitraires* (en laissant de côté les valeurs *exceptionnelles* des λ). Les coefficients $b_0, \ldots, b_{r-1}$ *étant pris au hasard,* ce type d'équations (1)' et l'intégrale (2) sont en général *irréductibles;* mais pour des choix particuliers de $b_0, \ldots, b_{r-1}$ il n'en est plus ainsi. Par exemple, si l'on donne aux b des valeurs *numériques* quelconques, les valeurs correspondantes des g sont aussi numériques, et l'équation (1)' (quels que soient les exposants λ) se réduit à $y' = 0$.

En particulier, *les coefficients $b_0, \ldots, b_{r-1}$ étant donnés arbitrairement, il existe une infinité d'équations irréductibles* (1)' $\Big($où $a_{r-1}, \ldots, a_0$ dépendent algébriquement des b, $\frac{db}{dx}$ et de constantes dont le nombre croît indéfiniment avec $\nu\Big)$, telles que *l'intégrale $y(x, C)$ prenne exactement ν valeurs autour des points critiques mobiles,* et cela si grand que soit l'entier donné ν. Il n'y a d'exception que si les b satisfont à certaines conditions particulières.

TROISIÈME PROBLÈME.

19. Le problème que nous venons de discuter, problème qui consiste à former, *sans aucune restriction,* les équations (1) de degré donné dont l'intégrale générale est représentée par (2) où n est donné, comportait évidemment une solution explicite (sous une forme ou sous une autre). Un problème plus difficile consiste à résoudre la même question en astreignant les coefficients de (1) à appartenir *à une classe donnée de fonctions,* par exemple à être *algébriques* en x.

Une comparaison fera nettement ressortir la différence entre les deux problèmes : supposons qu'on se propose de déterminer (sans aucune restriction) toutes les équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre (E) dont l'intégrale générale est algébrique. La solution est immédiate : il suffit de prendre au hasard deux fonctions algébriques φ_1, φ_2, et d'éliminer C_1, C_2 entre les équations

$$y = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2, \qquad \frac{dy}{dx} = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2', \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = C_1\varphi_1'' + C_2\varphi_2'';$$

on obtient ainsi toutes les équations cherchées dont les coefficients sont connus explicitement en fonction de deux fonctions algébriques arbitraires et de leurs dérivées premières et secondes.

Proposons-nous, au contraire, de déterminer toutes les équations (E) intégrables algébriquement, et dont les coefficients appartiennent à une classe *donnée* de fonctions algébriques, *par exemple sont rationnels en* x. Le problème devient beaucoup plus compliqué, et sa solution exige une étude préalable des irrationnelles $y(x)$ engendrées par les équations (E) à coefficients rationnels.

Astreignons donc les coefficients de l'équation (1) à appartenir à une classe *donnée* de fonctions. Pour fixer les idées, nous les astreindrons à être *algébriques* en x. Mais la solution que nous allons indiquer s'appliquerait aussi bien si la classe donnée de fonctions était différente, soit plus restreinte (comme celle des fonctions rationnelles en x), soit plus étendue (comme celle des fonctions algébriques en x et e^x).

Nous nous proposons donc, en définitive, de résoudre le problème suivant :

Former toutes les équations (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+2}\,y^{r+2} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}\,y^{r-1} + \ldots + b_0} \tag{1}$$

de degré r *donné* ET A COEFFICIENTS ALGÉBRIQUES EN x, *qui admettent l'intégrale première irréductible* ([1])

$$F(y, x) \equiv h(x)[y - g_1(x)]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n(x)]^{\lambda_n} = \text{const.},$$

où l'entier n *et les exposants numériques* λ *sont donnés.*

([1]) Je rappelle que l'intégrale première F = const. est *irréductible* si l'on ne peut la remplacer par une intégrale de même forme où n est diminué d'au moins une unité.

A fortiori, les $(n+k+r)$ fonctions ρ ne sont pas distinctes; admettons qu'elles soient liées par i relations et i seulement. Pour un système quelconque de constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, C_0, \ldots, C_{k+r}$, satisfaisant à ces i relations, les équations (τ), (θ) en $g_1, \ldots, y_{k+r}$ se réduisent à $(n+k+r-i)$ équations distinctes et compatibles qui admettent des solutions où tous les g sont distincts et où i des fonctions $g_1, \ldots, g_n, y_1, \ldots, y_{k+r}$ sont choisies arbitrairement. Comme, d'autre part, les g_i une fois déterminés, les fonctions $y_1, \ldots, y_{k+r}$ le sont évidemment, on pourra se donner arbitrairement i des fonctions g, soit $g_1, \ldots, g_i$.

Mais quand les conditions (τ), (θ) sont vérifiées, le degré r de Q dans $(1)'$ est égal à $n-1-(l_1+l_2+\ldots+l_k-k+r)=0$; P (qui est de degré $r-1$) est donc identiquement nul, et l'équation $(1)'$ se réduit à $\frac{dy}{dx}=0$. Comme cette équation doit admettre la solution $y=g_1(x)$, où g_1 est arbitrairement choisi, la conclusion est absurde. Les fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_{n+k}$ de $(g_1, \ldots, y_{k+r})$ sont donc indépendantes. C. Q. F. D.

Il suit de là qu'en laissant de côté certaines valeurs exceptionnelles des constantes λ, C, les conditions (τ) définissent $(n+k)$ des fonctions $g_1, \ldots, g_n, y_1, \ldots, y_{k+r}$ en fonction de r des fonctions g arbitrairement choisies. Donc, *les exposants λ étant donnés, à chaque système d'entiers positifs dont la somme est égale à $n-1-r$, soit $l_1-1, \ldots, l_k-1$, correspond un type d'équations* $(1)'$ *cherchées qui dépend* (*par des relations connues explicitement*) *de r fonctions et de k constantes arbitraires.* Il ne peut y avoir d'exception que pour *des valeurs singulières des exposants* λ.

14. C'est le résultat fondamental auquel nous voulions arriver. Avant de le préciser, nous ferons quelques remarques importantes.

En premier lieu, de quelque manière qu'on choisisse les constantes λ, C, les équations (τ) (¹) sont *ou distinctes ou incompatibles*. En effet, si pour un système λ', C′ des constantes λ, C, les équations (τ) se réduisent à $(n+k-i)$ équations compatibles et distinctes, on peut encore ajouter à ces équations les équations (θ), et pour des valeurs convenables des $C_{k+1}, \ldots, C_{k+r}$, le système (τ), (θ) en $g_1, \ldots, y_{k+r}$ admettrait des solutions où un au moins des g serait arbitraire, résultat que nous savons absurde.

Levons maintenant deux objections qu'on peut faire au raisonnement précédent. Il est clair d'abord que, toutes les fois que, dans l'intégrale (2),

---

(¹) Où les g sont assujettis essentiellement à être distincts.

$g_1, \ldots, g_n$ satisfont aux conditions discutées ci-dessus, l'équation $(1)'$ est au plus de degré r. Mais (sous sa forme irréductible) n'est-elle pas nécessairement de degré inférieur? Autrement dit, les conditions que nous avons écrites, nécessaires et suffisantes pour que le degré ne dépasse pas r, n'entraînent-elles pas d'elles-mêmes un abaissement plus considérable? La réponse est immédiate d'après ce qui précède; s'il en était ainsi, une des équations (θ) serait conséquence des équations (τ), ce qui est impossible. Si donc on prend d'une façon quelconque les r fonctions arbitraires $g_1, \ldots, g_r$ dont dépend la solution de (τ), le degré de l'équation $(1)'$ *irréductible* sera exactement égal à r; il ne s'abaissera que pour un choix particulier des fonctions $g_1, \ldots, g_r$.

15. Une objection plus sérieuse est la suivante : le théorème énoncé plus haut s'applique en particulier *au cas* $r = 0$, c'est-à-dire à l'équation $y' = 0$. Il est d'ailleurs évident qu'on peut toujours écrire l'intégrale de cette équation sous la forme

$$(y - C_1)^{\lambda_1} \ldots (y - C_n)^{\lambda_n} = \text{const.},$$

mais cette forme n'est pas irréductible. On peut se demander s'il n'en est pas toujours ainsi dès que n est très grand par rapport à r; autrement dit, si (dès que n dépasse une certaine limite N par rapport au degré r donné), l'intégrale (2) n'est pas nécessairement réductible à une forme analogue où n est au plus égal à N. Nous allons voir qu'*il n'en est rien, dès que r est plus grand que zéro.*

D'une façon précise, convenons de dire que la forme (2) de l'intégrale est *irréductible*, s'il est impossible de la ramener à une forme analogue où n est diminué au moins d'une unité. Quand la forme (2) est *réductible*, la fonction $y(x, C)$ ne prend qu'un nombre *fini* ν de valeurs autour des points critiques mobiles, et vérifie une relation $\rho(y, x) = \text{const.}$, où ρ est une fraction rationnelle en y de degré ν. De plus, on a (*voir* p. 4)

$$(\alpha) \qquad F = \gamma(\rho - c_1)^{\mu_1} \ldots (\rho - c_i)^{\mu_i}.$$

Comme $y = \infty$ est une solution de $(1)'$, on peut supposer le numérateur Π_ν de ρ de degré ν en y et le dénominateur $\Pi_{\nu-j}$ de degré $\nu - j$; on a alors

$$\Sigma\lambda = (\nu - j)\Sigma\mu, \qquad \text{d'où} \qquad \Sigma\mu \neq 0.$$

Il est clair, dès lors, que, *si aucun des rapports* $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ *n'est commensurable, la forme* (2) *est irréductible,* du moment que ν *dépasse l'unité.*

gatifs ou nuls, dont le premier m_1 est plus grand que zéro. Comme $\mu_1 m_1 + \ldots + \mu_d m_d$ (d'après l'hypothèse faite sur les μ) ne saurait être nul, $\frac{C_j}{C_1}$ ne peut se réduire à une constante.

Il suit de là que si le nombre $(k-1)d$ est supérieur à $k+r-1$, les conditions $(\tau)''$ sont en général *incompatibles*. Si $(k-1)d = k+r-1-r'$ $(r' \geqq 0)$, en général les conditions $(\tau)'''$ définissent les g algébriquement en fonction de r' d'entre eux et de $(k-1)d$ constantes arbitraires; h est ensuite défini (1) par l'égalité $h = \rho_{1,1}^{-\mu_1}, \ldots, \rho_{1,d}^{-\mu_d}$ qui donne bien, pour $\frac{h'}{h}$, une fonction algébrique des $g, \frac{dg}{dx}$, donc de x.

Pour passer au cas général où $\Sigma\lambda$ n'est pas nul, il suffit ensuite d'effectuer sur y une transformation linéaire quelconque à coefficients algébriques en x. Pour passer au cas général où $\Sigma\lambda$ est nul, il suffit, après avoir traité le problème particulier ($\Sigma\lambda = 1$, $\Sigma\lambda g = 0$, $g_1 = 1$) pour la valeur $(n-1)$ de l'entier n, d'effectuer sur y la transformation homographique la plus générale à coefficients algébriques en x.

La solution du problème dans le premier cas est ainsi complète. Observons que, les λ étant pris au hasard, d est égal à n; le nombre $(k-1)n - k$ ou $k(n-1) - n$ croît indéfiniment avec n si k n'est pas égal à 1 et, par suite, dépasse r. Pour les valeurs de n très grandes par rapport à r, *les λ ayant des valeurs* QUELCONQUES, le problème posé ne comporte donc, en général, de solution que celle qui correspond à $k = 1$, c'est-à-dire la solution où il n'existe qu'une seule solution remarquable qui est d'ordre $n - r$ ou $n - r + 1$, suivant que $\Sigma\lambda$ est nul ou différent de zéro.

21. DEUXIÈME CAS. — *Tous les rapports $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ sont réels et commensurables.*

Il est loisible, dans ce cas, de supposer tous les λ *entiers et premiers entre eux;* F est alors rationnel en y et s'écrit

$$F = h(x)\frac{(y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_m)^{\lambda_m}}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n}},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant positifs. Soit N le plus grand des deux entiers $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)$ et $(\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n)$; je dis que la fonction $y(x, C)$ prend exactement N

(1) Si $n = r + 1$, il n'y a pas de valeur remarquable de la constante; on prend au hasard les fonctions algébriques $g_1, \ldots, g_n, \frac{h'}{h}$.

valeurs autour des points critiques mobiles. Admettons, en effet, qu'elle en prenne ν seulement ($\nu < N$); elle vérifierait alors une relation $\rho(y, x) = c$, où ρ est rationnel en y et a ses *deux* termes de degré ν, et l'on aurait

$$F \equiv (\rho - c_1)^{\mu_1}(\rho - c_2)^{\mu_2} \ldots (\rho - c_j)^{\mu_j},$$

j étant ou supérieur à 2, ou égal à 2, avec la condition $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$. Dans l'un ou l'autre cas, le nombre total des racines distinctes des deux équations (en y), $\rho - c_1 = 0$, $\rho - c_2 = 0$, doit être inférieur à n; l'intégrale de (2) se laisse donc mettre sous la forme

$$c = \frac{\rho - c_1}{\rho - c_2} \equiv \bar{h}(x) \Pi[y - \bar{g}(x)]^{\bar{\lambda}},$$

où le nombre des facteurs $y - g$ est moindre que n, ce qui est contre l'hypothèse.

Ce point établi, soit k le nombre des valeurs *remarquables* de C (y compris, s'il y a lieu, les valeurs $C = 0$, $C = \infty$). Envisageons successivement les hypothèses $k > 2$, $k = 2$, $k = 1$, $k = 0$.

I. $k > 2$. — L'intégrale de (1) est algébrique; *h et les g sont algébriques*. La solution du problème se déduit immédiatement de la discussion des pages 14-27 : il suffit de répéter les mêmes conclusions que pour les problèmes (C), (B), (A) (p. 26-27), à cela près que les λ sont supposés des entiers et que les r, $(r + 2)$ ou $(r + 3)$ fonctions arbitraires doivent être prises *algébriques en x*.

II. $k = 2$. — Les valeurs remarquables de C sont nécessairement $C = 0$, $C = \infty$. Autrement, comme on le voit aussitôt, la forme (2) ne serait pas irréductible; n est égal à $r + 2$ ou à $r + 1$, suivant que $\Sigma\lambda$ est nul ou non. Les fonctions $g_1, \ldots, g_n$ sont *algébriques* en x; toutes les équations (1) cherchées s'obtiennent en prenant arbitrairement $(n + 1)$ fonctions algébriques $g_1, \ldots, g_n$, $H(x)$, et en écrivant l'égalité

$$C = e^{\int H(x)dx}(y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n},$$

d'où l'équation (1)

$$y' \sum \frac{\lambda_i}{y - g_i} = -H(x) + \sum \frac{\lambda_i g'_i}{y - g_i}$$

dont les coefficients dépendent algébriquement des g, g' et de H. [En particulier, on peut prendre arbitrairement le dénominateur $Q(y, x)$ du second

membre de (1) et a_{r+2}, et il reste encore deux fonctions algébriques arbitraires; a_{r+2} est nul si $\Sigma\lambda$ est différent de zéro.]

III. $k=1$. — La valeur remarquable de la constante est $C=0$ ou $C=\infty$. Soit $C=\infty$; $g_{m+1}, \ldots, g_n$ sont donc *algébriques* en x; les $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont égaux à l'unité, et l'intégrale de (1) vérifie les relations

$$\frac{y^\nu + A_{\nu-1}y^{\nu-1} + \ldots + A_0}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n}} = u, \qquad \frac{du}{dx} = \alpha u + \beta,$$

où les A, α, β sont algébriques en x. Si m *est inférieur à* $\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n$, ν est égal à cette dernière somme; $y=\infty$ est une solution de (1), $u=1$ est solution de l'équation linéaire en u; d'où, en changeant u en $u-1$, la forme de l'intégrale

$$e^{\int H(x)\,dx}\frac{y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_0}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n}} = \text{const.},$$

où *les* A, $g_{m+1}, \ldots, g_n$ *et* H *sont des fonctions algébriques de x arbitrairement choisies* (n est égal à $r+1$). Si m est au moins égal à $\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n$, toutes les équations (1) cherchées s'obtiennent en prenant *arbitrairement les $n+2$ fonctions algébriques* de x, $A_{m-1}, \ldots, A_0$, $g_{m+1}, \ldots, g_n$ et α, β, et en remplaçant, dans l'équation linéaire

$$\frac{du}{dx} = \alpha u + \beta,$$

u par $\dfrac{y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_0}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n}}$ (n est alors égal à $r+2$ ou à $r+1$, suivant que m est égal ou supérieur à $\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n$). Il est loisible de supposer A_0 égal à zéro, par exemple.

IV. $k=0$. — Tous les λ sont égaux à l'unité, et les nombres m et $m-n$ diffèrent au plus d'une unité; on a donc $n=2m\pm1$ ou $n=2m$.

Si n est égal à $2m$, n est égal à $r+2$ et l'équation (1), la plus générale, s'obtient en remplaçant, dans l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dx} = \alpha u^2 + \beta u + \gamma,$$

u par $\dfrac{y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_0}{B_m y^m + B_{m-1}y^{m-1} + \ldots + B_0}$, les A, B et α, β, γ étant des fonctions algébriques arbitraires de x. (Il est loisible de supposer $A_0=0$, $B_m=0$, $B_0=1$.)

Si n est égal à $2m \pm 1$ (soit $n = 2m - 1$), n est aussi égal à $r + 1$, $y = \infty$ est une solution de (1), et l'équation (1) la plus générale s'obtient en remplaçant, dans l'équation linéaire $\frac{du}{dx} = \alpha u + \beta$, u par

$$\frac{y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \ldots + A_0}{y^{m-1} + B_{m-2} y^{m-2} + \ldots + B_0},$$

où α, β et les A, B sont des fonctions algébriques quelconques de x. (Il est loisible de supposer $A_0 = 0$.)

Le problème que nous nous étions posé au début du § 19 est donc *complètement résolu*.

Observons notamment qu'*il existe une infinité d'équations* (1) *de degré donné r en y et algébriques en x, dont l'intégrale y(x, C) prend exactement un nombre donné* ν *de valeurs autour des points critiques mobiles (si grand que soit l'entier* ν *par rapport à r). Dès que* ν *dépasse* $r + 1$, l'intégrale $y(x)$ est une fonction algébrique de x et de $e^{\int H(x)dx}$, où $H(x)$ est algébrique en x.

Il existe *une infinité* d'équations (1) de degré r en y et algébriques en x, dont l'intégrale peut se mettre sous la forme *irréductible*

$$h(x)(y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n} = \text{const.},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des entiers positifs ou négatifs, *et cela si grand que soit n par rapport à r.* Mais *dès que n dépasse* $r + 2$, l'intégrale $y(x)$ est nécessairement algébrique.

22. *Historique.* — Je dirai, en terminant, quelques mots de l'historique de la question. Dans les travaux auxquels j'ai déjà renvoyé (*voir* p. 2), j'ai établi ces deux propositions :

1° Quand l'intégrale d'une équation (1) donnée se laisse mettre sous la forme (2), elle s'obtient algébriquement, ou par quadrature, ou par l'intégration d'une équation de Riccati.

2° Pour que (2) soit l'intégrale première d'une équation (1) irréductible et *de degré r* [1], il faut et il suffit que la somme $\Sigma(l_i - 1)$, étendue à toutes les solutions *remarquables* $y_i(x)$ de multiplicité l_i, soit égale à $(n - 2 - r)$ ou à $(n - 1 - r)$, suivant que $\Sigma\lambda$ est nul ou différent de zéro.

---

[1] r désignant le plus grand des nombres q, $p - 2$ (*voir* p. 2).

Cette relation

$$(a) \qquad r = n - 2 - \Sigma(l_i - 1) \qquad (\text{pour } \Sigma\lambda = 0)$$

est d'ailleurs une extension d'une formule établie par M. Darboux dans son célèbre Mémoire sur les intégrales algébriques des équations $y' = R(y, x)$ où R est rationnel en y, x (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1877).

Les conditions pour qu'il existe une solution *remarquable* de multiplicité l s'expriment par $(l - 2)$ relations algébriques et une relation quasi algébrique entre les g, h et la valeur *remarquable* de la constante; il suit de là que les équations (1), *de degré r donné*, dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme (2) où n est donné, dépendent de $(n + 1)$ fonctions g, h liées par $(n - 2 - r)$ conditions (pour $\Sigma\lambda = 0$), ou par $(n - 1 - r)$ conditions (pour $\Sigma\lambda = 0$), donc de $(r + 3)$ (ou de $r + 2$) fonctions arbitraires, et dépendent, en outre, de constantes arbitraires dont le nombre croît indéfiniment avec n.

Mais, dans mes travaux antérieurs, je m'étais occupé surtout de la nature des intégrations qui relient h et les g aux coefficients de (1), en même temps que de la question de reconnaître si une équation (1) donnée est intégrable sous la forme (2). Je n'avais donc rien dit sur la *compatibilité* des $(n - 2 - r)$ ou $(n - 1 - r)$ relations auxquelles conduit le problème inverse, problème qui consiste à former explicitement toutes les équations (1), de degré r donné, intégrables sous la forme (2) où n est donné.

La discussion de ces conditions est développée aux pages 15-27 de ce Mémoire qui renferme aussi la solution du problème analogue, mais plus difficile, où l'on assujettit les coefficients (1) à appartenir à une classe *donnée* de fonctions. Enfin j'ai insisté sur certaines conséquences particulières des résultats généraux que j'avais publiés antérieurement, telles que celle-ci : « Quand tous les exposants λ sont distincts, les y se calculent algébriquement à l'aide des coefficients de (1), et h dépend d'une quadrature. »

Dans une Note récente des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, M. Korkine a étudié les équations

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_r y^r + \ldots + a_r}{y^r + b_{r-1} y^{r-1} + \ldots + b_0} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

dont l'intégrale peut s'écrire

$$(2)' \qquad (y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n} = C,$$

en supposant que le polynome Q(y) *a ses racines distinctes et que son degré est au moins égal à celui de* P(y). M. Korkine a énoncé sans démonstration un théorème détaillé d'où il ressort :

1° Que $g_1, \ldots, g_n$ se calculent en fonction de $b_{r-1}, \ldots, b_0, a_r$, par une quadrature;

2° Que les équations (1)′, de degré r donné, dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme (2) où n et les λ sont donnés, dépendent, sous forme connue, de $(r+1)$ fonctions et de constantes arbitraires.

En se reportant au corps de ce Mémoire (*voir* notamment p. 12-14 et p. 26-28), il est facile de voir que ces résultats concordent avec les miens, si l'on tient compte des hypothèses particulières faites par M. Korkine $(h \equiv 1,\ p \leqq q)$.

J'ajoute enfin que les méthodes développées dans ce Mémoire s'appliquent aussi bien à l'étude beaucoup plus générale des équations

$$(1)'' \qquad F(y', y, x) = 0$$

dont l'intégrale se laisse écrire

$$(2)'' \qquad \int K(y, x)\,dy + L(y, x)\,dx = \text{const.},$$

K *et* L *étant algébriques en* y; autrement dit, à l'étude des équations (1) qui admettent un *facteur intégrant* $M(y, x)$ *algébrique en* y. J'ai démontré (*voir*, par exemple, mes *Leçons de Stockholm*, 10e Leçon, p. 155 et p. 169-170) qu'une telle équation (1)″ s'intègre algébriquement ou par quadratures, ou se ramène à une équation de Riccati. Quant à la formation des équations (1)″ de degré donné en y' et en y, dont l'intégrale se met sous la forme (2)″, c'est un problème plus compliqué que le problème correspondant relatif aux équations (1) intégrables sous la forme (2), mais qui se traite exactement de la même manière et conduit à des résultats analogues. Une égalité, qui généralise l'égalité (a), mais beaucoup plus difficile à établir (*loc. cit.*, p. 168) joue là encore le rôle fondamental. Mais c'est là un point sur lequel je reviendrai ultérieurement.

LES

FLAMMES SENSIBLES

ET LES

LENTILLES ACOUSTIQUES,

PAR M. E. BOUTY,

Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Paris.

1. Le phénomène de la sensibilité des flammes, tel que je l'ai décrit dans un Mémoire antérieur ([1]) est d'une grande généralité. On obtient des flammes sensibles avec divers gaz combustibles ou mélanges de gaz, dans des conditions qui confirment, en la complétant, l'interprétation que j'ai proposée. C'est toujours quand la flamme va devenir ou commence à devenir bruyante que se manifeste, avec plus ou moins d'intensité, la sensibilité à *tous* les sons aigus et non à quelques sons particuliers formant une échelle discontinue.

La forme circulaire de l'orifice est de beaucoup la plus favorable aux phénomènes de la sensibilité. Les flammes plates (forme papillon, par exemple) ne jouissent que d'une sensibilité rudimentaire et à peu près indépendante de la nature du gaz combustible. Tout ce qui suit se rapporte à des flammes issues d'orifices circulaires.

2. *Flammes de gaz d'éclairage.* — J'ai pris des tubes de verre à peu près identiques que j'ai effilés à un bout, puis raccourcis et usés à la lime de façon à abattre toutes les aspérités de l'orifice et à atteindre le maximum de sensibilité pour la pression ordinaire (12^{cm} d'eau) des conduites du laboratoire. Il s'est trouvé que, malgré la différence de forme, parfois très accusée, de la partie effilée, le diamètre des meilleurs orifices ne s'écartait guère que de $\frac{1}{20}$ de part et d'autre de la moyenne $1^{mm},725$: la hauteur

([1]) *Journal de Physique*, 3e série, t. IV, p. 401.

moyenne des flammes était de 55^{cm}, leur débit de 320^{lit} à l'heure. La vitesse du jet suivant l'axe devait être à peu près la même pour toutes.

On rendra sensible une flamme de gaz issue d'orifices beaucoup plus étroits, en substituant un gazomètre aux conduites et en élevant suffisamment la pression ; mais la sensibilité qu'on peut ainsi atteindre décroît assez rapidement avec le diamètre de l'orifice d'émission. Ainsi, une certaine flamme, alimentée par les conduites, atteint seulement 32^{cm} de haut : elle est insensible ; alimentée par un gazomètre, elle est à son maximum de sensibilité sous une pression de 23^{cm} d'eau : à ce moment, elle a 50^{cm} de haut et elle débite 212^{lit} de gaz à l'heure ; deux autres flammes de $10^{cm},5$ et de 6^{cm} de haut, sous la pression de la conduite, exigent respectivement des pressions de 42^{cm} et de 62^{cm} d'eau : elles s'élèvent alors à 30^{cm} et à 25^{cm} de hauteur et débitent 117^{lit} et 105^{lit} à l'heure ; mais la dernière de ces flammes n'est plus sensible à la consonne *s* même très fortement accentuée ; elle n'est excitée que par le cri très intense d'une sirène aiguë (1).

La vitesse axiale du jet joue évidemment un grand rôle dans ces phénomènes : elle doit être supérieure à un certain minimum, peut-être assez peu variable avec le diamètre de l'orifice.

Remarquons que ce n'est qu'à partir d'une certaine vitesse axiale que des tourbillonnements ont chance de se produire dans la flamme et j'ai montré antérieurement (2) que toute cause de tourbillonnement déforme la flamme de la même manière que le font les sons aigus.

3. Si l'on agit sur une flamme de gaz de haute sensibilité par un bruit aigu très faible, le tic-tac d'une montre par exemple, on constate que la montre doit être placée au voisinage de l'orifice ou de la gaine bleue de la région basilaire de la flamme. Le tic-tac est alors accompagné de flammèches

---

(1) Une expérience, faite en vue de comparer les sections des orifices et les pressions produisant la sensibilité maximum, a fourni les résultats suivants :

Diamètre de l'orifice.	Pression en colonne d'eau.
mm	cm
1	33
0,81	53
0,68	84

Les produits de la section par la pression de sensibilité varient comme les nombres 1, 1,085 et 1,18.

(2) Voir *Journal de Physique*, 3e série, t. IV, p. 404.

qui jaillissent latéralement, à la partie supérieure de la flamme, avec un bruit qui rappelle les coups de piston d'une locomotive très éloignée. Avec certaines flammes il est possible d'éloigner horizontalement la montre jusqu'à une quinzaine de centimètres de l'orifice : la sensibilité de la flamme doit être considérée comme proportionnelle au carré de cette distance maximum.

Quand on excite une flamme par l'intermédiaire de deux miroirs conjugués, le foyer du miroir récepteur doit coïncider avec un point de la région basilaire de la flamme. S'il coïncide avec un point de la zone blanche placée au-dessus, le système des miroirs est sans effet.

L'organe sensible des flammes cylindriques de gaz d'éclairage est donc situé à leur base. Nous aurons à rechercher la nature de cet organe.

4. *Flammes de divers gaz.* — L'hydrogène fournit, avec des orifices circulaires, de grosses flammes, presque invisibles à leur partie supérieure [1] effilée, et dont la sensibilité est extrêmement faible. Si l'on augmente suffisamment la pression, la flamme fait entendre un bruit de souffle qui remplace le ronflement du gaz; en même temps elle s'étrangle et forme une sorte de panache indistinct; mais, pour aucune valeur de la pression, elle ne présente nettement cette sorte d'élasticité de la flamme du gaz qui, par l'excitation sonore, passe brusquement d'une forme à une autre très différente et revient à sa forme primitive aussitôt que cesse l'excitation. Cependant, on saisit un médiocre bruit de souffle quand, plaçant une toile métallique dans la flamme non encore soufflante, on produit dans le voisinage un bruit aigu et intense.

Si l'on mêle du gaz d'éclairage à l'hydrogène, on obtient sans peine des flammes sensibles; mais ce qu'il y a de très remarquable, c'est qu'il suffit, pour sensibiliser la flamme, de mêler à l'hydrogène un gaz inerte, de l'acide

---

[1] Ces flammes présentent un tube intérieur obscur très effilé, limité par une surface faiblement lumineuse qui prolonge en quelque sorte l'orifice.

Si l'on ajoute à l'hydrogène des proportions croissantes d'un gaz hydrocarboné, ce tube interne se raccourcit, devient indistinct et finalement disparaît pour $\frac{1}{10}$ en volume de gaz d'éclairage ou $\frac{1}{100}$ d'acétylène. *La simple inspection de la partie basilaire de la flamme révèlerait donc des proportions encore bien moindres de ces gaz étrangers.*

Le tube disparaît aussi par l'addition d'une proportion d'acide carbonique supérieure à trois dixièmes en volume.

Ces faits sont évidemment liés à la décomposition ou dissociation par la chaleur des gaz carbonés et à la précipitation de carbone libre qui en résulte.

favorise les retards (et, par suite, la sensibilité) puisque, d'une part, ce gaz agit en divisant la masse et que de l'autre il abaisse la température de combustion.

3° On comprend enfin que l'oxygène se comportera à l'inverse d'un gaz inerte. Ainsi s'interprètent très simplement plusieurs faits nouveaux que nous avons observés; mais, à elle seule, cette première remarque ne peut suffire à tout expliquer.

6. *Lentilles gazeuses.* — La deuxième remarque est d'ordre purement physique; elle exige d'assez longs développements auxquels se rattache tout ce qui va suivre.

Les grandes sensibilités coïncident avec un aspect particulier de la flamme tranquille, formée d'un tube de flamme bleue engainant un cylindre obscur de gaz relativement froid. Ce système constitue une lentille acoustique cylindrique. Si elle est convergente et si son foyer est à l'intérieur même de la flamme, le mouvement vibratoire reçu de sources sonores éloignées sera concentré sur une ligne focale intérieure. De quelque façon que les ondes sonores agissent pour rompre l'équilibre de la flamme, l'excitation deviendra ainsi plus efficace. L'inverse doit se produire si la lentille est divergente. Nous sommes donc conduits à étudier la condition de convergence et la distance focale de cette sorte de lentilles.

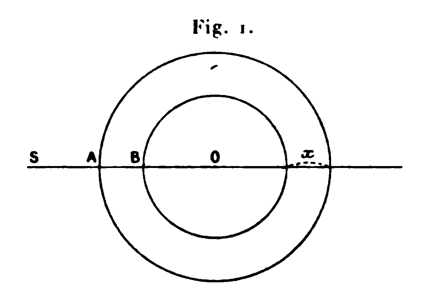
Mais nos connaissances sur la constitution et la température des diverses parties d'une flamme sont trop rudimentaires pour qu'on puisse tenter un calcul rigoureux. Nous substituerons à la flamme réelle une flamme fictive constituée par trois milieux de densités et de températures uniformes : 1° le milieu extérieur de densité ρ, dont nous désignerons par T la température absolue; 2° le milieu moyen (zone de combustion) : densité ρ', température absolue T'; rayon intérieur R, extérieur $R + x$; 3° milieu intérieur (gaz non brûlé) : densité ρ'', température T''.

L'uniformité de densité et de température dans chacune des régions de la flamme réelle n'est certainement pas réalisée, même d'une manière approximative; toutefois, la variation de température est excessivement rapide de part et d'autre des limites apparentes de la flamme bleue, et nos hypothèses nous fourniront au moins un renseignement qualitatif.

Nous allons appliquer la théorie élémentaire des lentilles à la flamme fictive. Soient V, V', V'' les vitesses du son dans les trois milieux, respec-

tivement proportionnelles à $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $\sqrt{\frac{T'}{\rho'}}$, $\sqrt{\frac{T''}{\rho''}}$. Considérons une source sonore S, à l'infini, dans le milieu extérieur et dans la direction OA (*fig.* 1).

Fig. 1.



L'image S′, fournie par la première réfraction, sera à une distance ϖ du sommet A, distance que nous compterons positivement dans le sens AS. On a

$$\frac{\frac{V}{V'}}{\varpi} = -\frac{\frac{V}{V'} - 1}{R + x}. \tag{1}$$

Soit de même F la distance, au point B, de l'image S″ fournie par la deuxième réfraction, distance comptée positivement dans le sens BS; on a encore

$$\frac{\frac{V'}{V''}}{F} - \frac{\frac{V}{V'}}{\varpi + x} = -\frac{\frac{V'}{V''} - 1}{R}. \tag{2}$$

Éliminant ϖ entre (1) et (2), il vient

$$F = -V'VR\frac{VR + V'x}{V(V'^2 + VV'' - 2V'V'')R + V'^2(V' - V'')x}. \tag{3}$$

7. *Condition de convergence.* — Nous supposons que la combustion a lieu dans l'air. Dans ces conditions, on a toujours $V' > V$, c'est-à-dire

$$\frac{T}{T'} > \frac{\rho'}{\rho},$$

car $\frac{T'}{T}$ est assez grand, et la présence de l'azote atmosphérique dans la flamme empêche toujours $\frac{\rho'}{\rho}$ de prendre des valeurs très éloignées de l'unité.

Au contraire, on a, suivant les cas,

$$V'' \gtrless V'.$$

Voyons ce qui en résulte pour la convergence de la lentille AB.

La condition de convergence est que F soit négatif, c'est-à-dire que le dénominateur du second membre de (3) soit positif. Elle peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad V' - V'' > \frac{VV'(V' - V)R}{VR(2V' - V) + V'^2 x}.$$

Puisque $V' - V$ est positif, les deux termes de cette dernière fraction sont positifs; l'inégalité (4) ne peut être vérifiée que si

$$V' > V'',$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad \frac{T'}{T''} > \frac{\rho'}{\rho''}.$$

C'est une condition nécessaire, mais non suffisante, de la convergence.

Ainsi, quelle que soit l'épaisseur x de la flamme par rapport au rayon R de l'espace obscur, la lentille *ne peut être convergente que si l'inégalité* (5) *est vérifiée*. Mais, si l'on a $V' > V''$, il sera toujours possible de choisir x assez grand pour que (4) soit vérifiée, c'est-à-dire pour que la lentille soit convergente.

Résolue par rapport à x, la condition (4) de convergence devient

$$\frac{x}{R} > \frac{V(2V'V'' - V'^2 - VV'')}{V'^2(V' - V'')}$$

ou

$$(4\ bis) \qquad \frac{x}{R} > \frac{\sqrt{\frac{T}{\rho}}\left(2\sqrt{\frac{T'T''}{\rho'\rho''}} - \frac{T'}{\rho} - \sqrt{\frac{T}{\rho}\frac{T''}{\rho''}}\right)}{\frac{T'}{\rho'}\left(\sqrt{\frac{T'}{\rho'}} - \sqrt{\frac{T''}{\rho''}}\right)}.$$

8. *Condition relative à la position du foyer*. — Pour que le foyer de la lentille tombe dans l'espace obscur intérieur, il faut que ϖ' soit inférieur à 2R en valeur absolue, d'où l'inégalité

$$\frac{x}{R} > \frac{V'V^2 + 4VV'V'' - 2VV'^2 - 2V^2V''}{V'^2(2V' - 2V'' - V)}$$

ou

$$\frac{x}{R} > \frac{\sqrt{\frac{T'}{\rho'}}\,\frac{T}{R} + 4\sqrt{\frac{TT'T''}{\rho\rho'\rho''}} - 2\sqrt{\frac{T}{\rho}}\,\frac{T'}{\rho'} - 2\,\frac{T}{\rho}\sqrt{\frac{T''}{\rho''}}}{\frac{T'}{\rho'}\left(2\sqrt{\frac{T'}{\rho'}} - 2\sqrt{\frac{T''}{\rho''}} - \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)}. \tag{6}$$

9. *Vérifications.* — Nous allons essayer de mettre des nombres à la place des lettres, mais pour cela il faut s'adresser à des gaz simples ou à des mélanges définis dont on connaisse les températures de combustion. Nous nous occuperons d'abord de l'hydrogène pur ou mélangé d'un gaz inerte, en faisant usage des températures de combustion T′ publiées par MM. Mallard et Le Chatelier (1).

Nous prendrons uniformément comme température extérieure 27°C.; d'où

$$T = 300;$$

nous admettrons que la température de l'espace obscur intérieur ne peut guère dépasser de plus de 200° la température extérieure et nous prendrons uniformément

$$T'' = 500.$$

Nous rapporterons les densités à l'hydrogène. On aura donc pour l'air

$$\rho = 14,5.$$

Une difficulté se présente pour fixer la densité ρ'; le volume total v' des produits de la combustion est en général inférieur à la somme v des volumes des gaz non brûlés et l'on ignore quel est le volume spécifique qu'on doit assigner réellement au mélange constituant la flamme. Cependant, grâce à la présence de l'azote atmosphérique dans cette flamme, la diminution relative $\frac{v - v'}{v}$ est toujours peu importante; on pourra, sans grand inconvénient, admettre que le volume spécifique est $\frac{v + v'}{2}$.

10. *Hydrogène.* $\rho'' = 1$. — La combustion de l'hydrogène dans l'air peut se réduire à la formule approchée

$$H^2 + O + 4Az = H^2O + 4Az.$$

(1) Mallard et Le Chatelier, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIII, p. 1077.

7^{vol} de gaz sont réduits à 6 par la combustion; $\frac{v - v'}{2} = \frac{1}{6}$. Admettant que dans la zone de combustion le volume est 6, 5, on trouve (¹)

$$\rho' = \frac{74}{6,5} = 11,38 = \frac{\rho'}{\rho''}.$$

MM. Mallard et Le Chatelier donnent, pour la combustion de l'hydrogène dans l'air,

$$t' = 2080°, \qquad \text{d'où} \qquad T' = 2353°,$$

$$\frac{T'}{T''} = 4,706;$$

on a donc

$$\frac{T'}{T''} < \frac{\rho'}{\rho''}.$$

La condition de convergence ne peut être réalisée. La lentille cylindrique formée par la base d'une flamme d'hydrogène est *divergente*.

Si l'on attribue un rôle à cette lentille dans la production des phénomènes de la sensibilité, on est donc amené à conclure que les flammes d'hydrogène pur sont très peu sensibles, et c'est en effet ce que l'expérience nous a montré.

11. *Mélanges d'hydrogène et d'azote.* — Quand on ajoute des proportions croissantes d'azote à l'hydrogène, on abaisse d'abord assez peu la température de combustion T′ et l'on change à peine ρ', tandis que ρ'' croît très rapidement. Le rapport $\frac{\rho'}{\rho''}$ décroît donc très vite et le sens de l'inégalité (5) ne tarde pas à se renverser.

Soit, par exemple, le mélange de 0,8 d'hydrogène et 0,2 d'azote en volume

$$\rho'' = 3,6.$$

La formule de combustion est

$$H^2 + O + 4,5\,Az = H^2O + 4,5\,Az.$$

(¹) En tout cas ce rapport est compris entre les deux limites extrêmes $\frac{74}{6} = 12,33$ et $\frac{74}{7} = 10,57$.

7^{vol} et demi de gaz se condensent en 6^{vol} et demi

$$\rho' = \frac{81}{7} = 11,57;$$

$$\frac{\rho'}{\rho''} = 3,214.$$

La température de combustion T′ n'est pas donnée directement par MM. Mallard et Le Chatelier; mais, pour un mélange dans lequel la proportion d'azote est, à la proportion atmosphérique, dans le rapport $\frac{3,01}{1,92} = 1,567$, ces savants trouvent une température de combustion $t = 1770°$, c'est-à-dire inférieure de 310° seulement à la précédente. Dans le cas que nous considérons ici, nous avons fait croître la proportion d'azote dans un rapport beaucoup moindre : $\frac{4,5}{4} = 1,125$. Nous admettrons, à titre d'approximation, que la température de combustion s'est abaissée de

$$\frac{0,125}{0,567}\,310° = 68°,4,$$

c'est-à-dire que

$$T' = 2353° - 68°,3 = 2284°,7,$$

$$\frac{T'}{T''} = 4,57.$$

Le sens de l'inégalité fondamentale est renversé, la lentille *peut être convergente*.

Tous calculs faits, la condition de convergence (4 *bis*) se réduit à

$$\frac{x}{R} > 1,79.$$

Mais le dénominateur de (6) se trouve presque nul, c'est-à-dire qu'il faudrait supposer au rapport $\frac{x}{R}$ une valeur énorme pour que le foyer tombât à l'intérieur de l'espace obscur. Les conditions de sensibilité ne sont pas encore remplies.

Toutefois, il suffira d'accroître assez peu la proportion d'azote pour que l'inégalité (6) nous donne des valeurs de x acceptables. En effet, le calcul, répété pour un mélange de $\frac{1}{3}$ en volume d'azote et $\frac{2}{3}$ d'hydrogène, donne

$$\rho'' = 5,333, \qquad \rho' = 11,374, \qquad T' = 2216°,3;$$

d'où, pour la condition de convergence,

$$\frac{x}{R} > 0,196,$$

et pour la condition relative à la position du foyer

$$\frac{x}{R} > 0,877.$$

Cette condition se trouve effectivement satisfaite dans mes expériences et le sera désormais pour tous les mélanges plus riches en azote.

12. *Mesure des diamètres.* — Pour obtenir approximativement la valeur du rapport $\frac{x}{R}$, j'introduis dans la région cylindrique de la base de la flamme deux fils de platine minces horizontaux, que je rapproche à volonté sur un diamètre de la flamme : 1° jusqu'à ce que les fils, entièrement extérieurs à la flamme, paraissent la toucher, mais en restant sombres; 2° jusqu'à ce que les extrémités de ces fils, portées au blanc éblouissant, paraissent toucher le bord intérieur de la flamme vers l'espace obscur. On mesure la distance des extrémités des fils après extinction de la flamme.

Cette mesure a été exécutée notamment pour le mélange de $\frac{1}{3}$ en volume d'azote et $\frac{2}{3}$ d'hydrogène. Sous une pression de 18^{cm} la flamme débitait 416^{lit} du mélange à l'heure. La consonne *s*, prononcée faiblement à plus de 1^{m} de distance, réduisait la flamme au $\frac{1}{3}$ de sa hauteur normale laquelle était de 35^{cm} environ. La flamme était donc très sensible. On a trouvé

$$2(x+R) = 1^{cm},$$
$$2R = 0^{cm},51;$$

d'où

$$\frac{x}{R} = 0,96,$$

valeur nettement supérieure à la limite 0,877 calculée ci-dessus. Le foyer de cette flamme sensible tombe donc dans l'espace obscur intérieur.

13. Des expériences analogues ont été réalisées pour un grand nombre de mélanges d'hydrogène et d'azote. Je me borne à rapporter les observations relatives à la sensibilité de ces flammes.

Prop. d'azote en volume.	Sensibilité maximum.
0,1	Sensibilité appréciable aux forts sifflements
0,2	Id.
0,25	Sensibilité passable, mais seulement à la limite où la flamme va souffler
0,3	Flamme très sensible
0,333	Id.
0,4	Id.
0,5	Id.
0,6	Id.
0,669	Flamme extrêmement sensible
0,75	S'éteint avant de devenir sensible

Le calcul approché, fondé sur la considération des lentilles acoustiques, et l'expérience fixent donc à peu près au même point la limite des grandes sensibilités.

14. *Mélanges d'hydrogène et d'acide carbonique.* — Je ne rapporterai pas les calculs relatifs aux mélanges d'hydrogène et d'acide carbonique. Ils fixent la limite de sensibilité à une proportion en volume d'acide carbonique un peu plus faible que la proportion d'azote correspondante. Notons que, dans le cas actuel, la présence d'un gaz carboné dans la flamme tend à rendre indistincte la limite intérieure de la zone de combustion ; la mesure de $\frac{x}{R}$ deviendrait illusoire pour des mélanges riches en acide carbonique.

Voici les résultats expérimentaux relatifs à la sensibilité :

Prop. d'acide carbonique en volume.	Sensibilité maximum.
0,1	Sensibilité faible
0,25	Sensibilité faible et assez bonne sensibilité dans deux expériences consécutives.
0,333	Flamme très sensible
0,5	Id.
0,667	Id.
0,75	Mélange qu'on ne peut enflammer d'une manière durable

Des mélanges ternaires d'hydrogène, d'acide carbonique et d'azote, contenant en tout $\frac{1}{3}$ en volume de gaz inerte, sont aussi sensibles que les mélanges binaires correspondants (1).

(1) Signalons, en passant, que j'ai pu répéter avec succès, pour un mélange d'hydrogène et

15. *Acétylène* : $\rho'' = 13$, $\rho' = 14{,}56$. — M. Le Chatelier [1] donne, pour la température de combustion de l'acétylène dans l'air, $t' = 2260°$,

$$T' = 2533.$$

La condition de convergence et la condition relative au foyer sont très largement satisfaites, les seconds membres de (4) et de (6) prenant des valeurs négatives.

Cependant la sensibilité est médiocre : la flamme n'est excitée par la consonne *s* que quand on l'accentue fortement. Alors la flamme s'écrase, à la manière des flammes de gaz, en formant un panache éblouissant.

Il faut remarquer que l'espace obscur intérieur à la flamme n'existe que sur une hauteur de $0^{cm},5$ au plus au-dessus de l'orifice. Au-dessus, l'axe de la flamme, d'un blanc éclatant, est absolument opaque pour la lumière et probablement aussi pour le son. Les conditions sont celles que la flamme du gaz présente à partir d'une dizaine de centimètres au-dessus de l'orifice, dans la région où nous savons que l'excitation devient inefficace. La lentille cylindrique n'existant ici que sur $0^{cm},5$ de haut au lieu de 10^{cm}, on ne peut être surpris que son effet soit médiocre.

16. *Mélange d'acétylène et d'azote.* — L'azote est à peine plus dense que l'acétylène. On se convaincra, comme dans le cas de l'hydrogène, que l'abaissement de la température T′, produit par une addition même assez considérable d'azote, est peu important. Les conditions de la lentille cylindrique varieront donc très peu : il est clair que les inégalités (4) et (6) continueront à être satisfaites, même pour des mélanges riches en azote.

L'expérience montre, comme on pouvait s'y attendre, que la longueur de la portion basilaire de la flamme transparente croît avec la proportion d'azote : l'effet de la lentille cylindrique doit augmenter dans le même rapport. Voici les résultats obtenus :

---

d'acide carbonique contenant 0,4 en volume de gaz inerte, des expériences analogues à celles de la page 2 sur la variation de pression nécessaire pour sensibiliser la flamme quand on change le diamètre de l'orifice.

(1) Le Chatelier, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXI, 30 décembre 1895. Température déduite de la formule de combustion ordinaire.

Proportion d'azote en volume.	Sensibilité maximum.
0,143	Supérieure à celle de l'acétylène pur
0,333	Flamme très sensible
0,500	Flamme longue et grêle d'une sensibilité remarquable
0,667	La flamme s'éteint

Notons cependant que les mélanges d'acétylène et d'acide carbonique ne paraissent pas supérieurs à l'acétylène pur au point de vue de la sensibilité.

17. *Mélanges d'acétylène et d'hydrogène. Gaz d'éclairage.* — L'hydrogène agit surtout en abaissant la densité ρ'' du mélange intérieur et, par suite, diminuera la convergence de la lentille cylindrique. Il est donc nécessaire de s'assurer si les inégalités (4) et (6) continuent à être vérifiées.

Soit d'abord un mélange, à volumes égaux, d'acétylène et d'hydrogène

$$\rho'' = 7, \qquad \rho' = 12,97.$$

Nous admettrons que la température de combustion est la moyenne de celles de l'hydrogène et de l'acétylène

$$T' = \frac{2353 + 2533}{2} = 2443.$$

L'inégalité (6) se réduit à

$$\frac{x}{R} > 0,3;$$

à 4^{cm} au-dessus de l'orifice on a trouvé

$$2(x + R) = 12^{mm},5,$$
$$2R = 7^{mm},5,$$

d'où

$$\frac{x}{R} = 0,67.$$

Donc l'inégalité (6) est très largement satisfaite. Nous avons déjà signalé (p. 4) l'admirable sensibilité de cette flamme qui obéit même au tic-tac de la montre.

Le gaz d'éclairage, mélange d'hydrogène et d'un volume un peu supérieur de carbures divers, a, par rapport à l'hydrogène, une densité ρ'' variable de 6 à 8. On peut considérer que le calcul précédent lui est grossièrement

applicable. Or, on trouve expérimentalement pour $\frac{x}{R}$ des valeurs comprises entre 0,5 et 0,8, c'est-à-dire très supérieures à 0,3. On rend compte ainsi de l'extrême sensibilité de ces flammes.

Pour un mélange de 25 pour 100 d'acétylène et de 75 pour 100 d'hydrogène, le calcul approché donne

$$\rho'' = 4, \qquad \rho' = 12,17, \qquad T' = 2398.$$

Condition de convergence

$$\frac{x}{R} > 0,533;$$

condition relative au foyer

$$\frac{x}{R} > 3,716.$$

L'expérience donne

$$2(x+R) = 14^{mm},2,$$
$$2R = 6^{mm},45,$$
$$\frac{x}{R} = 1,2.$$

La lentille est encore convergente, mais son foyer (formule 3) tombe à $1^{mm},5$ au dehors de la flamme; or cette flamme, dont la base rappelle, par son aspect, la flamme du gaz, possède une sensibilité qui, bien que très inférieure à celle des flammes précédentes, est encore supérieure à celle de l'acétylène pur.

Les approximations qui servent de base à tous ces calculs sont telles qu'on ne peut guère s'attendre à une meilleure concordance numérique.

On est d'ailleurs en droit de se demander quel peut bien être le degré d'efficacité de nos lentilles. Cette efficacité est limitée : 1° par les réflexions sur les deux faces de la lentille; 2° par la diffraction.

18. *Effet des réflexions.* — Si l'on se borne à considérer les rayons centraux, les seuls auxquels la théorie élémentaire des lentilles s'applique en toute rigueur, on peut faire usage des formules de la réflexion vitreuse pour l'incidence normale, c'est-à-dire admettre que le rapport de l'intensité réfléchie à l'intensité incidente, à la surface de séparation de deux milieux

dans lesquels le son se propage avec des vitesses V et V′, est

$$\left(\frac{V - V'}{V + V'}\right)^2.$$

On en déduit que la proportion α de l'intensité *transmise* après réflexion sur les deux faces de nos lentilles est

$$\alpha = \frac{16\,V\,V'^2\,V''}{(V + V')^2 (V' + V'')^2}.$$

On trouve ainsi

Composition du gaz (en volumes).	α.
Acétylène pur	0,665
0,5 acétylène, 0,5 hydrogène	0,708
0,3 azote, 0,7 hydrogène	0,720
0,25 acétylène, 0,75 hydrogène	0,731

La proportion de l'intensité réfléchie varie dans ces divers cas de 0,33 à 0,27 (¹).

19. *Effet de la diffraction.* — Le foyer géométrique est en réalité le centre d'une frange brillante d'autant plus large que la longueur d'onde de la radiation considérée est plus grande.

Nous ne savons si les sons très aigus, capables d'exciter les flammes, agissent par leur note fondamentale ou par leurs harmoniques élevés. En tout cas, il ne paraît pas légitime d'admettre que les longueurs d'onde efficaces puissent descendre au-dessous de quelques millimètres. Or les rayons de courbure intérieurs de nos lentilles sont de 2^{mm} à 4^{mm}, les rayons extérieurs de 5^{mm} à 8^{mm}. On peut donc craindre que le rapport dans lequel l'intensité est accrue sur la ligne focale ne s'écarte guère de l'unité.

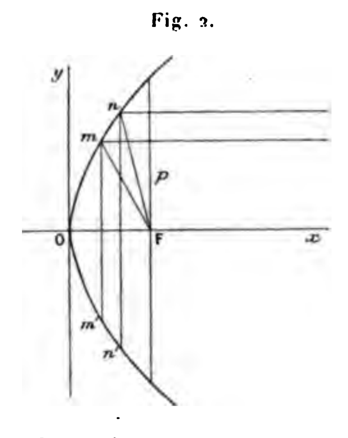
Je n'ai tenté aucun calcul relativement à ces lentilles. Je me suis borné à appliquer les formules ordinaires de la diffraction au problème plus simple des petits miroirs.

Soit un miroir parabolique de révolution de paramètre p, limité par un

(¹) Le tube abducteur du verre par lequel s'échappe la flamme constitue, lui aussi, une lentille cylindrique sonore convergente, mais la vitesse du son dans le verre étant de plus de 5000^{m}, l'intensité α transmise après deux réflexions est extrêmement petite.

plan perpendiculaire à l'axe passant par le foyer et soumis à l'action d'ondes planes perpendiculaires à l'axe. La zone $mnm'n'$ du miroir (*fig.* 2) remplace

Fig. 2.



une portion d'onde plane de surface $2\pi y\,dy$. Substituons à chaque élément de la zone une source sphérique équivalente et supposons d'abord p assez grand par rapport à λ. En prenant égal à 1 le coefficient de vitesse afférent à l'onde plane, la composante efficace de la vitesse envoyée en F par la zone aura pour coefficient

$$\frac{2\pi y\,dy\left(\frac{p}{2}-x\right)}{\lambda\left[y^2+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2\right]},$$

ou, puisque $y^2 = 2px$,

$$\frac{4\pi p\,dx(p-2x)}{\lambda(p+2x)^2}.$$

Puisque tous ces rayons arrivent concordants en F, les coefficients efficaces de vitesse s'ajoutent simplement, et le coefficient de vitesse résultant en F est

$$\frac{4\pi p}{\lambda}\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{(p-2x)\,dx}{(p+2x)^2} = \frac{2\pi p}{\lambda}(1-\log 2) = 1{,}928\,\frac{p}{\lambda}.$$

On voit aisément, en appliquant la méthode de M. Gouy ([1]), que cette expression est encore suffisamment approchée, même pour $p = \lambda$.

L'intensité envoyée en F par le miroir est donc supérieure à l'intensité

([1]) GOUY, *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XXIV, p. 178.

incidente dans un rapport

$$\rho = 1,928^2 \frac{p^2}{l^2} = 3,716 \frac{p^2}{l^2}.$$

Ce résultat est sans doute très approximativement applicable à un miroir sphérique de rayon p.

Avec un miroir de 1^{cm} de rayon, on aurait donc $\rho = 3,716$ pour une longueur d'onde de 1^{cm} et $\rho = 371,6$ pour une longueur d'onde de 1^{mm}. Il est clair que, pour des miroirs cylindriques, on obtiendrait des valeurs de ρ moindres, et tout ce que nous pouvons conclure pour le cas plus complexe des lentilles cylindriques, c'est qu'on n'est pas autorisé *a priori* à considérer leur effet comme négligeable pour des longueurs d'onde de 1^{cm} à 1^{mm}.

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

PREMIER MÉMOIRE,

PAR

EUGÈNE COSSERAT,
Professeur à la Faculté des Sciences
de l'Université de Toulouse.

FRANÇOIS COSSERAT,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
attaché à la Cie des chemins de fer de l'Est.

INTRODUCTION.

On sait quel puissant instrument de découverte a été le *trièdre de référence mobile* dans la théorie des surfaces, entre les mains de Ribaucour (1) et de M. Darboux (2), et l'on peut voir par les *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs (3) que son introduction dans la *Mécanique des solides invariables* n'est pas moins heureuse. Nous nous sommes proposé d'étendre l'emploi de ce trièdre à l'étude des *corps déformables*, et nous avons été ainsi conduits, dans plusieurs questions importantes, à des résultats qui nous paraissent nouveaux.

Nous avons dû reprendre l'examen des équations ordinaires de la théorie de l'Élasticité, et nous avons été amenés à remonter aux équations plus générales qui sont dues principalement à Lord Kelvin (4). Nous avons pu

(1) Consulter en particulier : RIBAUCOUR, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (*Mémoires couronnés* et *Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. XLIV; 1881). — *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VII; 1891).

(2) G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, II, III, IV; 1887 à 1896.

(3) G. KŒNIGS, *Leçons de Cinématique professées à la Faculté des Sciences de Paris*, t. I, 1er fascicule; 1895.

(4) W. THOMSON, *General Theory of the Equilibrium of an Elastic Solid* (*Mathematical and Physical Papers*, vol. III, p. 386 et suiv.).

rattacher cette généralisation à la notion du ds^2 de l'espace, et l'on verra par là combien devient utile le trièdre de référence mobile.

On ne trouvera pas, dans ce premier Mémoire, les résultats nouveaux que nous annonçons plus haut, et l'on nous pardonnera d'avoir fait d'abord une exposition dont certaines parties sont bien connues; mais nous avons cru qu'il n'était pas sans intérêt de présenter, sous l'aspect que leur donne la notion précédente, les principes de la théorie de l'Élasticité.

Notre travail est divisé en quatre Chapitres.

Dans le premier, nous avons repris d'une façon assez complète, quoique concise peut-être, l'étude de la déformation d'un milieu continu. Nous partons de la définition actuellement adoptée pour les composantes de cette déformation; mais on remarquera tout ce qu'elle contient d'arbitraire, et combien la notion seule de l'élément linéaire de l'espace permettrait de développer cette théorie préliminaire d'une manière plus systématique; nous aurons l'occasion de revenir plus tard sur ce point.

La notion du ds^2 correspond au procédé qui, dans la Mécanique rationnelle, consiste à substituer à un corps naturel une distribution continue de matière. Un corps continu étant rapporté à un système de coordonnées rectangulaires x, y, z, et u, v, w désignant les projections du déplacement d'un point (x, y, z), le corps possède, après sa déformation par un système de forces extérieures, un élément linéaire dont le carré

$$(dx + d\mathrm{u})^2 + (dy + d\mathrm{v})^2 + (dz + d\mathrm{w})^2$$

est de la forme

$$(1 + 2\varepsilon_1)\,dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2)\,dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3)\,dz^2 + 2\gamma_1\,dy\,dz + 2\gamma_2\,dz\,dx + 2\gamma_3\,dx\,dy.$$

Les recherches de Lamé, de Bonnet, de M. Lipschitz et de M. Darboux, sur la théorie des coordonnées curvilignes et sur la théorie des surfaces, nous fournissent les renseignements les plus essentiels sur les six expressions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, qui ne sont autres que les six éléments par lesquels on a l'habitude de caractériser la déformation dans la théorie de l'Élasticité.

On observera que nous avons séparé dans ce Chapitre l'étude générale de la déformation de celle de la déformation infiniment petite, et que les propositions classiques relatives à cette dernière sont rattachées à leur

véritable origine par la considération du *système auxiliaire de M. Darboux* (1).

Dans le Chapitre II, nous avons repris la théorie de l'effort à l'intérieur d'un milieu continu, en admettant les équations ordinaires, qui, on le remarquera, correspondent à la forme donnée par Euler aux équations de l'Hydrodynamique. Mais ces dernières ont reçu de Lagrange une autre forme dont l'analogue existe également dans la théorie de l'Élasticité; nous montrons comment cette seconde forme se retrouve dans les systèmes d'équations considérés par plusieurs géomètres, en particulier par Kirchhoff (2) et par M. Boussinesq (3); le lien entre ces systèmes s'établit très simplement au moyen de six nouvelles auxiliaires, que nous désignons par P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3, qui s'expriment aisément en fonction des N_i, T_i de Lamé, et inversement. Il nous a semblé intéressant d'identifier ainsi des recherches importantes qui jusqu'ici, croyons-nous, n'avaient pas été rapprochées.

On remarquera que, dans les Chapitres précédents, nous n'avons pas cherché à tirer parti des avantages qu'aurait pu procurer l'emploi systématique des formes quadratiques; nous avons pensé qu'il était préférable de laisser aux formules fondamentales leur aspect habituel.

Dans le Chapitre III, il nous a paru indispensable d'élargir la base sur laquelle on fait ordinairement reposer la théorie de l'Élasticité, et de développer les indications données par Lord Kelvin (4), qui a rattaché cette théorie aux principes de la Thermodynamique, et qui a introduit, à la suite

---

(1) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, Note XI, *Sur l'équation auxiliaire*, 1896.

(2) Kirchhoff, *Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastichen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile* (*Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, Bd. 9, S. 762-773, Wien; 1852). Ce Mémoire n'a pas été réimprimé dans les *Gesammelte Abhandlungen* de Kirchhoff, ainsi que le remarque M. Pearson dans son *History of the Theory of the Elasticity*, vol. II, part II, p. 50.

(3) J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, p. 516 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XX).

(4) W. Thomson, *On the Thermo-elastic and Thermo-magnetic Properties of Matter*, Part I (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 57-77). Ce Mémoire a été réimprimé, en 1878, dans le *Philosophical Magazine;* il est réimprimé également p. 291 et suivantes du vol. I des *Mathematical and Physical Papers* de Lord Kelvin.

de Green (¹), la notion de l'*énergie de déformation*. Cette notion permet de ne pas se borner au cas de la déformation infiniment petite, qui est régi par la loi restreinte dite *loi de Hooke*, et dont la considération est loin d'être suffisante pour aborder tous les problèmes qui se posent dans les applications. Il est permis d'espérer qu'en adoptant une loi plus générale, comme nous l'avons fait dans ce Chapitre III, et tout en raisonnant sur le milieu abstrait que nous avons appelé *corps parfaitement élastique*, on pénétrera le sens de plusieurs des phénomènes complexes que l'on observe dans la déformation des corps naturels. On ne peut s'empêcher de croire à une étroite parenté entre les notions que nous n'avons fait qu'esquisser sur les *équilibres de bifurcation*, les *équilibres limites*, les *échanges de stabilité* de M. Poincaré (²), etc., et, par exemple, les faits singuliers que M. Considère a soumis à la Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction (³), ou encore les résultats curieux que M. Hartmann a fait récemment connaître dans la *Revue d'Artillerie* (⁴).

Nous devons aussi appeler l'attention sur le raisonnement qui nous conduit aux équations de la déformation infiniment petite et qui nous a été inspiré par les recherches de M. Darboux (⁵) et de M. Poincaré (⁶); nous retrouvons entre autres les résultats donnés par M. Poincaré (⁷), dans ses *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, et qui dépendent du choix de l'état naturel.

Dans le Chapitre IV, nous considérons les coordonnées curvilignes, et c'est ici que commencent à apparaître l'importance de la considération du ds^2 de l'espace et tous les avantages que procure l'emploi du trièdre de référence mobile. Nous avons cru devoir résumer les principes qui se ratta-

---

(¹) G. GREEN, *On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common surface of two non-crystallized media* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. VII; 1839).

(²) H. POINCARÉ, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, p. 259-380; 1885).

(³) *Voir* les travaux de la *Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction*, 1ʳᵉ session, t. II et III; 1895.

(⁴) L. HARTMANN, *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (*Revue d'Artillerie*, t. XLV et XLVI; 1894-1895).

(⁵) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 2 et suiv.

(⁶) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII; 1894).

(⁷) H. POINCARÉ, *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, p. 47, 53, 58.

chent à ce trièdre; il nous a suffi, en prenant une variable de plus, de transcrire les résultats que l'on trouve dans les Leçons magistrales de M. Darboux sur la théorie générale des surfaces ([1]), auxquelles le lecteur devra se reporter.

Nous avons donné un rôle plus large qu'on ne le fait d'habitude aux coordonnées curvilignes dans la théorie de l'Élasticité, en ne les employant pas seulement pour définir le corps avant sa déformation comme Lamé, mais aussi pour étudier *le système triple de surfaces qui peut servir à représenter la déformation du corps*.

En outre, nous avons envisagé, dans ce Chapitre, les coordonnées les plus générales. Nous aurions pu, en les particularisant ainsi que le trièdre mobile, montrer ce que deviennent nos résultats dans le cas des systèmes triples orthogonaux auxquels on se borne habituellement, et retrouver notamment les équations bien connues données par Lamé. Mais nous aurons bientôt, lorsque nous aborderons les applications, à faire une étude approfondie des principaux systèmes particuliers de coordonnées; on verra que, à côté des coordonnées orthogonales, on doit placer d'autres systèmes non moins utiles, et que la considération du cercle de l'infini est encore ici d'une importance capitale.

Cet exposé des principes de la théorie de l'Élasticité, quoique limité aux points essentiels, ne nous a pas laissé de place pour commencer à traiter les questions nouvelles qui en constitueront les applications. Nous donnerons néanmoins une idée générale de ces questions, qui feront l'objet de Mémoires que nous espérons publier prochainement.

Le problème de la déformation infiniment petite forme actuellement la partie la plus importante de la théorie de l'Élasticité; les équations aux dérivées partielles du second ordre qui le régissent sont linéaires; pourtant, s'il est pris dans toute sa généralité, on ne sait encore le résoudre que pour des surfaces limites particulièrement simples : la sphère, le plan indéfini, certaines surfaces de révolution. Les résultats obtenus par Lamé ([2]) et Lord

---

([1]) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, II, III, IV; 1887-1896.

([2]) G. Lamé, *Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques* (*Journal de Mathématiques de Liouville*, vol. XIX; 1854).

Kelvin ([1]), MM. Boussinesq ([2]) et Cerruti ([3]), M. Wangerin ([4]), dans ces cas spéciaux, sont bien connus. Nous n'avons pas l'intention de chercher à les obtenir par une voie différente; mais, si, en suivant M. Poincaré ([5]), on reprend la question de l'existence de la solution des équations de la déformation infiniment petite, on est amené à retrouver la véritable origine des résultats dont nous venons de parler, et même à apercevoir une voie que l'on pourrait suivre pour les étendre à de nouvelles formes de corps.

A côté de cette méthode difficile, il en existe une autre indiquée par Barré de Saint-Venant, dans le problème célèbre qui porte son nom, et qu'il a appelée *méthode mixte ou semi-inverse*.

Barré de Saint-Venant considère comme imposée *une partie* seulement des conditions à la limite, et soumet à des restrictions la solution cherchée. Autrement dit, il adjoint, au système des équations aux dérivées partielles du problème général, un second système possédant des solutions communes avec le premier.

La solution du problème de Barré de Saint-Venant a fait l'objet de ses deux grands Mémoires, de 1853 et 1854, sur la torsion et la flexion des prismes ([6]); mais la méthode qu'il a ainsi inaugurée n'a guère été suivie

---

([1]) W. Thomson, *Dynamical Problems regarding Elastic Spheroïdal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid* (*Philosophical Transactions*, vol. CLIII, p. 583-616; 1864). Ce Mémoire a été réimprimé dans les *Mathematical and Physical Papers* de Lord Kelvin, vol. III, p. 351-394.

([2]) J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur;* Mémoire suivi de notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse, 1885.

([3]) Cerruti, *Ricerche intorno all' equilibrio de corpi elastici isotropi* (*Atti della Reale Accademia dei Lincei*, 3e série, Memorie, t. XIII, p. 81; 1882).

([4]) Wangerin, *Ueber das Problem des Gleichgewichts elasticher Rotationskörper* (*Archiv der Mathematik und Physik*, t. LV; 1873).

([5]) H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'un corps élastique* (*Comptes rendus*, t. CXXII, p. 154-159; 1896).

([6]) Barré de Saint-Venant, Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XIV, p. 233-560; 1855). — Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes (*Journal de Mathématiques de Liouville*, 2e série, t. I, p. 89-189; 1856).

depuis. L'opinion défavorable qu'en avait Lamé (¹) a-t-elle nui à son développement? Quoi qu'il en soit, elle a été reprise avec succès, il y a quelques années, par M. Pearson, qui a traité le cas d'une pièce droite pesante soumise sur sa surface latérale à une distribution quelconque de charge (²). La solution de ce problème a permis à l'éminent professeur de l'*University College* de Londres, de faire une critique très instructive de la théorie des poutres droites de Bernoulli et d'Euler, encore adoptée aujourd'hui par les ingénieurs. Nous montrerons quel est le vrai point de départ de cette solution. Comme dans le problème de Barré de Saint-Venant, on est ramené finalement à résoudre une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes du type elliptique; en étudiant le problème plus général des pièces courbes, nous avons été conduits à une équation du type elliptique qui présente cette particularité de se ramener, par un changement de variables, à l'équation d'Euler et de Poisson.

Mais il y a plus. Dans le problème du disque mince, ou du cylindre circulaire de longueur indéfinie, animé d'un mouvement de rotation, étudié autrefois par Maxwell (³), et que M. Chree (⁴) a repris dans les importants Mémoires qu'il a consacrés récemment aux équations de la déformation infiniment petite en coordonnées polaires et semi-polaires, nous avons trouvé lement, au fond de la question, l'équation d'Euler et de Poisson.

Nous avons été, par là, conduits à étudier d'une manière approfondie, dans la solution des équations de la déformation infiniment petite d'après la méthode mixte de Barré de Saint-Venant, l'introduction systématique des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indé-

---

(¹) G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 19ᵉ Leçon, p. 358. Lamé s'exprime ainsi : « Une digression trop étendue, sur une question particulière de la théorie mathématique de l'élasticité, pourrait donner quelque apparence de raison à ceux qui ne veulent voir, dans la grande généralité de cette théorie, qu'une complication inextricable, et qui préfèrent et prônent des procédés hybrides, mi-analytiques et mi-empiriques, ne servant qu'à masquer les abords de la véritable science. »

(²) K. Pearson, *On the Flexure of Heavy Beams subjected to continuous Systems of Load* (*The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, t. XXIV, p. 63-110; 1890).

(³) J.-C. Maxwell, *On the Equilibrium of Elastic Solids* (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. XX, p. 87-120; 1853).

(⁴) C. Chree, *The equations of an isotropic solid in polar an cylindrical coordinates* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XIV; 1889). — *On thin rotating isotropic disks* (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1891).

pendantes non seulement du type elliptique, mais aussi du type hyperbolique. On peut ainsi suivre la voie ouverte par Riemann pour exprimer les conditions à la limite; mais, surtout, le lien intime qui existe entre les équations du second ordre du type hyperbolique et la théorie des surfaces permet d'introduire de nombreuses considérations géométriques qui facilitent singulièrement l'application de la méthode de Barré de Saint-Venant et qui font disparaître l'empirisme que Lamé avait cru pouvoir reprocher à cette dernière.

Les problèmes auxquels donnent lieu les corps minces se prêtent aussi à ces considérations. Nous nous proposons d'en reprendre l'étude avec certains développements. La méthode que nous avons suivie dans le présent Mémoire pour établir les équations de la déformation infiniment petite trouvera ici une application également utile et introduira une grande netteté dans les raisonnements par lesquels on forme actuellement les équations fondamentales de la question. En Angleterre, le trièdre de référence mobile a été déjà quelquefois adopté dans cette partie de la théorie de l'Élasticité; nous l'emploierons systématiquement et l'on verra combien il la rend attrayante et féconde en résultats intéressants.

CHAPITRE I.

DÉFORMATION D'UN MILIEU CONTINU.

I. — De la déformation en général.

1. *Définition d'une déformation; les six fonctions qui lui sont associées.*

Considérons un milieu continu quelconque occupant une portion de l'espace, et concevons que chaque point de ce milieu éprouve un déplacement variant d'une façon continue avec la position du point. Nous dirons que le milieu a reçu une *déformation*, lorsque ses points n'*auront pas subi un déplacement d'ensemble combiné ou non avec une transformation par symétrie;* pour comprendre tous les cas dans la même définition, nous pourrons dire que la déformation est *nulle*, lorsque les déplacements des différents points du milieu correspondront à un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, imposé à ce milieu.

Rapportons les deux positions du milieu à un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Soient x, y, z les coordonnées primitives d'un point et $x + \mathrm{u}$, $y + \mathrm{v}$, $z + \mathrm{w}$ ce qu'elles deviennent après le déplacement de ce point. Supposons que les fonctions u, v, w de x, y, z soient définies et admettent des dérivées premières continues pour toutes les valeurs des variables correspondant à des points du milieu. Un système quelconque de telles fonctions u, v, w détermine une *seule déformation;* mais, inversement, à une déformation ne correspond pas *un seul système de fonctions* u, v, w, si l'on a égard au déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, que l'on peut toujours imposer à un milieu sans le déformer.

Proposons-nous de définir l'état de déformation du milieu au moyen d'autres fonctions, qui seront déterminées d'une façon unique par la déformation et qui la définiront sans ambiguïté.

Les formules

$$x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w} \tag{1}$$

peuvent être considérées, au point de vue où nous nous plaçons, comme définissant une correspondance entre deux espaces, l'un lieu du point (x,

y, z), l'autre lieu du point (x_1, y_1, z_1). Mais on peut aussi les envisager comme des formules rapportant l'espace, lieu du point (x_1, y_1, z_1), à un système de coordonnées curvilignes (x, y, z).

La question que nous posons revient alors à la détermination de fonctions de x, y, z, déterminant ce système de coordonnées curvilignes d'une façon unique, et qui soient déterminées de la même façon par lui ; nous retombons sur une question de Géométrie qui est maintenant bien connue après les recherches de Lamé, de Bonnet, de M. Lipschitz et de M. Darboux. Nous avons des fonctions satisfaisant à la question, soit en prenant les six coefficients de la forme différentielle quadratique qui représente le carré de l'élément linéaire du second espace rapporté au système de coordonnées (x, y, z), soit en prenant des fonctions convenables de ces six coefficients. Or, si

$$(2)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \mathrm{A}\,dx^2 + \mathrm{B}\,dy^2 + \mathrm{C}\,dz^2 + 2\mathrm{D}\,dy\,dz + 2\mathrm{E}\,dz\,dx + 2\mathrm{F}\,dx\,dy$$

est le carré de l'élément linéaire du second espace, cette expression devient identique au carré de l'élément linéaire du premier espace, lorsque les fonctions A, B, C se réduisent à l'unité et que les fonctions D, E, F s'annulent. Nous sommes donc amenés à adopter, pour définir la déformation, les six fonctions

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathrm{A}-1}{2},\qquad \varepsilon_2 = \frac{\mathrm{B}-1}{2},\qquad \varepsilon_3 = \frac{\mathrm{C}-1}{2},\qquad \gamma_1 = \mathrm{D},\qquad \gamma_2 = \mathrm{E},\qquad \gamma_3 = \mathrm{F},$$

dont les expressions, au moyen de x, y, z, se calculent, lorsque u, v, w sont données, par les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],\\
\varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right],\\
\gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z},\\
\gamma_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x},\\
\gamma_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},
\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit immédiatement des suivantes :

$$
(4) \quad \left\{
\begin{aligned}
dx_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,\\
dy_1 &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz,\\
dz_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz,
\end{aligned}
\right.
$$

qui résultent de la différentiation des relations (1).

2. *Propriétés des fonctions associées; conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une déformation soit nulle, c'est-à-dire corresponde à un déplacement d'ensemble combiné ou non avec une transformation par symétrie.*

Les six fonctions que nous venons d'associer à une déformation ne diffèrent en rien, ou ne diffèrent pas sensiblement, de celles qui ont été envisagées par les différents auteurs qui ont eu à s'occuper plus ou moins directement de la question, et, en particulier, par Green (1), Barré de Saint-Venant (2), Kirchhoff (3), Lord Kelvin (4) et M. Boussinesq (5).

La façon dont nous venons de rattacher ces six fonctions à la théorie des coordonnées curvilignes nous fournit immédiatement des renseignements précieux.

---

(1) GREEN, *On the propagation of light in crystallized media* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1839; ou *Mathematical Papers*, p. 291-311).

(2) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Mémoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité, et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très petits* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXIV, p. 260; 1847). On pourra lire aussi une Communication faite trois ans auparavant par Barré de Saint-Venant sur le même sujet (*Société Philomathique*, 26 mars 1844, ou *Journal l'Institut*, n° 537), ainsi que les Mémoires insérés en 1863 et 1871 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

(3) KIRCHHOFF, *Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile* (*Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, Bd. 9, S. 762-773, Wien, 1852). Ce Mémoire n'a pas été réimprimé dans les *Gesammelte Abhandlungen* de Kirchhoff.

(4) W. THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Part II, Appendice C au Chapitre VII, p. 461.

(5) J. BOUSSINESQ, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Note 3, p. 593 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, t. XX).

Tout d'abord, pour résumer ce que nous avons dit au numéro précédent, nous avons la proposition suivante :

A toute déformation correspondent six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 définies par les formules (3); *et inversement, au système de six fonctions ainsi construites correspond une déformation et une seule* (¹), *celle qui leur a donné naissance.*

Cette proposition peut être complétée et précisée :

Les six fonctions déterminées par les formules (3) *ne peuvent pas être prises arbitrairement; elles vérifient, comme on sait, un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre; à toute solution de ce système correspond une déformation et une seule.*

Il est un cas particulier qui a un grand intérêt : c'est celui où la déformation est nulle; nous avons, à son égard, la proposition suivante :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une déformation soit nulle, c'est-à-dire pour que la seconde position du milieu se déduise de la première au moyen d'un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie, s'obtiennent en annulant les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

Cette proposition nous paraît importante; elle permet de préciser certaines indications de Barré de Saint-Venant, qui n'ont peut-être pas été suffisamment comprises par quelques auteurs, et sur lesquelles nous reviendrons à propos des tiges minces, des plaques et des enveloppes minces.

3. *Déformation homogène; ses six composantes.*

Une déformation quelconque étant définie par les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, la déformation la plus simple est celle pour laquelle ces six fonctions sont des constantes non toutes nulles. Lord Kelvin a indiqué, le premier, l'intérêt que présente cette déformation; il l'a appelée une *déformation homogène* (²), et a nommé les valeurs constantes des six fonctions ε_1,

(¹) En considérant comme équivalentes deux déformations qui ne diffèrent que par un déplacement d'ensemble, combiné ou non avec une transformation par symétrie.

(²) W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers*, Art. XCII, *Elasticity and Heat*, t. III, p. 85. — Consulter aussi le *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part I, p. 116 et suivantes.

ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 *ses composantes*. Nous allons voir comment se justifient ces dénominations.

Les six fonctions A, B, C, D, E, F qui figurent dans la formule (2) étant des constantes, il en résulte que x_1, y_1, z_1 sont des fonctions entières et linéaires de x, y, z. La déformation homogène est donc définie par les formules (¹)

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = a_{10} + (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y_1 = a_{20} + a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z, \\ z_1 = a_{30} + a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z, \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} désignent des constantes telles que les six valeurs constantes

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11} + \tfrac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2), & \gamma_1 &= a_{32} + a_{23} + a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}, \\ \varepsilon_2 &= a_{22} + \tfrac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2), & \gamma_2 &= a_{13} + a_{31} + a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}, \\ \varepsilon_3 &= a_{33} + \tfrac{1}{2}(a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2), & \gamma_3 &= a_{21} + a_{12} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \end{aligned}$$

des six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 ne soient pas toutes nulles.

Ces six dernières constantes s'expriment au moyen d'éléments géométriques simples.

Reprenons, en effet, la formule générale (2) qui détermine l'élément linéaire du second espace. Posons

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{A} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}, \\ H_2 &= \sqrt{B} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}, \\ H_3 &= \sqrt{C} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3}, \end{aligned}$$

et définissons trois angles α_1, α_2, α_3, compris entre o et π, par les formules

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{D}{\sqrt{B}\sqrt{C}} = \dfrac{\gamma_1}{\sqrt{1+2\varepsilon_2}\sqrt{1+2\varepsilon_3}}, \\ \cos\alpha_2 = \dfrac{E}{\sqrt{C}\sqrt{A}} = \dfrac{\gamma_2}{\sqrt{1+2\varepsilon_3}\sqrt{1+2\varepsilon_1}}, \\ \cos\alpha_3 = \dfrac{F}{\sqrt{A}\sqrt{B}} = \dfrac{\gamma_3}{\sqrt{1+2\varepsilon_1}\sqrt{1+2\varepsilon_2}}. \end{cases}$$

(¹) En supprimant une translation, on pourrait, comme on le fait d'habitude, supposer que les trois constantes a_{10}. a_{20}, a_{30} sont nulles; mais nous préférons les conserver en vue des applications ultérieures. Nous supposons les constantes a_{ij} quelconques, en sorte que les seconds membres des relations (5) soient des fonctions linéaires indépendantes.

Le carré de l'élément linéaire du second espace prend la forme

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = H_1^2 dx^2 + H_2^2 dy^2 + H_3^2 dz^2 + 2 H_2 H_3 \cos\alpha_1 dy dz + 2 H_3 H_1 \cos\alpha_2 dz dx + 2 H_1 H_2 \cos\alpha_3 dx dy.$$

Nous voyons alors que $H_1 dx = \sqrt{1+2\varepsilon_1}\, dx$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$; de même, $H_2 dy = \sqrt{1+2\varepsilon_2}\, dy$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $z = \text{const.}$, $x = \text{const.}$; $H_3 dz = \sqrt{1+2\varepsilon_3}\, dz$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ De plus, α_1 est l'angle sous lequel se coupent les arcs élémentaires $H_2 dy$ et $H_3 dz$; α_2 est l'angle des arcs élémentaires $H_3 dz$ et $H_1 dx$; α_3 est l'angle des arcs élémentaires $H_1 dx$ et $H_2 dy$.

Plaçons-nous dans le cas de la déformation homogène, où H_1, H_2, H_3, α_1, α_2, α_3 sont des constantes. L'arc élémentaire $H_1 dx$ du second espace correspond à l'arc élémentaire dx du premier; par conséquent, un segment de droite parallèle à Ox subit un allongement qui ne dépend que de la longueur du segment considéré, et non de son origine. Nous pouvons donc parler, dans le cas actuel, H_1, H_2, H_3 étant des constantes, de l'accroissement de l'unité de longueur prise parallèlement à Ox, c'est-à-dire de la *dilatation linéaire suivant la direction* Ox : elle a pour valeur

$$H_1 - 1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1} - 1.$$

Les *dilatations linéaires suivant les directions* Oy *et* Oz sont de même

$$H_2 - 1 = \sqrt{1+2\varepsilon_2} - 1,$$
$$H_3 - 1 = \sqrt{1+2\varepsilon_3} - 1.$$

Pareillement, un angle droit dont les côtés sont parallèles à Oy, Oz devient α_1, et cela *quel que soit son sommet;* un angle droit dont les côtés sont parallèles à Oz, Ox devient α_2, et un angle droit dont les côtés sont parallèles à Ox, Oy devient α_3. Nous pouvons donc aussi introduire la notion des *dilatations angulaires* $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_3$ [1].

---

[1] Conformément à l'usage habituel, nous adoptons ces expressions et non leurs valeurs changées de signe.

On peut retrouver et compléter les derniers résultats que nous venons de rappeler, par le procédé suivant qui est classique ([1]).

Les équations (5) définissent une transformation homographique dont les propriétés bien connues résultent principalement de ce que les plans à l'infini se correspondent dans les deux figures ([2]). Des plans parallèles étant transformés en plans parallèles, il en résulte que deux lignes parallèles sont également dilatées, et que deux angles dont les côtés sont respectivement parallèles se transforment en deux angles jouissant de la même propriété.

Deux lignes parallèles étant également dilatées, à chaque direction est associée une dilatation linéaire *suivant cette direction*. Si l, m, n sont les cosinus directeurs d'une direction, et si r désigne la longueur d'un segment de droite issu de l'origine et parallèle à cette direction, la nouvelle longueur r_1 de ce segment sera donnée, d'après les équations (5), par la formule

$$r_1^2 = r^2[1 + 2(l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3 + mn\gamma_1 + nl\gamma_2 + lm\gamma_3)],$$

d'où l'on déduit, en particulier, les valeurs précédentes des dilatations linéaires suivant les axes.

Étant donnés de même les cosinus directeurs de deux directions, on obtient immédiatement le cosinus de l'angle entre leurs parties déformées, et, en particulier, si les deux directions sont deux des axes coordonnés, on retrouve les valeurs (6) précédemment écrites de $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$.

4. *Déformation en un point d'un milieu; ses six composantes.*

Envisageons une portion du milieu non déformé entourant un point $P(x, y, z)$. Si cette portion est suffisamment petite, les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, qui sont des fonctions continues de x, y, z, conserveront, en ses différents points, sensiblement les mêmes valeurs, celles qu'elles ont au point $P(x, y, z)$. Nous sommes ainsi amenés à substituer à la déformation d'une portion du milieu entourant un point $P(x, y, z)$, lorsque cette portion est suffisamment petite, une déformation homogène dont les six composantes sont les valeurs que prennent au point (x, y, z) les six fonctions associées à la déformation du milieu considéré.

([1]) Thomson et Tait, *Treatise on Natural Philosophy*. Vol. I, Part I, p. 116 et suiv.

([2]) Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, p. 811 et suiv.

C'est ce que nous pouvons encore exprimer de la façon suivante. Si nous considérons un point $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ du milieu non déformé, il est clair que les nouvelles coordonnées de ce point ne différeront de

$$x_1+dx_1,\quad y_1+dy_1,\quad z_1+dz_1$$

que de quantités qui seront infiniment petites du second ordre, lorsque dx, dy, dz seront tous trois infiniment petits du premier ordre. Ceci revient à dire que, dans le voisinage de P, la déformation est sensiblement définie par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} X_1 = a_{10} + (1+a_{11})X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ Y_1 = a_{20} + a_{21}X + (1+a_{22})Y + a_{23}Z, \\ Z_1 = a_{30} + a_{31}X + a_{32}Y + (1+a_{33})Z, \end{cases}$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées d'un point Q du milieu non déformé par rapport au point P, c'est-à-dire par rapport à trois axes ayant leur origine en P et parallèles aux axes coordonnés, où X_1, Y_1, Z_1 désignent les coordonnées de la nouvelle position de Q par rapport aux mêmes axes, et où enfin les coefficients a_{ij}, qui sont déterminés en même temps que x, y, z, sont donnés par les formules

$$(8)\qquad \begin{cases} a_{10} = u, & a_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & a_{12} = \dfrac{\partial u}{\partial y}, & a_{13} = \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ a_{20} = v, & a_{21} = \dfrac{\partial v}{\partial x}, & a_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & a_{23} = \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ a_{30} = w, & a_{31} = \dfrac{\partial w}{\partial x}, & a_{32} = \dfrac{\partial w}{\partial y}, & a_{33} = \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Ainsi, *la déformation subie par la portion du milieu avoisinant un point* $P(x, y, z)$ *de ce milieu est sensiblement une déformation homogène définie par les formules* (7) *et* (8), *et ayant pour composantes les valeurs que prennent au point* P *les six fonctions* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *qui définissent la déformation du milieu considéré.*

Nous désignerons la déformation homogène définie par les formules (7), (8) sous le nom de *déformation au point* P. Considérée uniquement au point de vue de la déformation, elle ne varie pas avec le point P, si la déformation considérée est homogène, et elle lui est équivalente.

Les valeurs des fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ au point P seront dites les *composantes* de la déformation au point P.

Une déformation homogène définie par les équations (5) ou (7) jouit de nombreuses propriétés. Nous allons rappeler les principales et introduire, en particulier, la définition de la *rotation en un point.*

Tout d'abord les résultats acquis au n° 3 nous montrent que nous aurons au point $P(x, y, z)$ trois dilatations linéaires *suivant* Ox, Oy, Oz, ayant pour valeurs

$$\sqrt{1+2\varepsilon_1}-1, \quad \sqrt{1+2\varepsilon_2}-1, \quad \sqrt{1+2\varepsilon_3}-1.$$

Un trièdre trirectangle de sommet P et d'arêtes parallèles aux axes deviendra un trièdre dont les angles α_1, α_2, α_3 seront définis par les formules (8).

5. *Les deux ellipsoïdes de déformation et la rotation en un point du milieu. Déformation pure.*

Il existera généralement un trièdre de sommet P, que la déformation au point P transformera dans un trièdre dont les arêtes seront respectivement parallèles à celles du premier; c'est ce que montrent immédiatement les formules (7).

Il existera en outre un trièdre trirectangle (¹) de sommet P qui restera trirectangle lorsqu'on lui appliquera la déformation au point P; c'est ce qu'on établit par le raisonnement bien connu que nous allons rappeler.

A un ellipsoïde placé dans l'un des deux espaces, les formules (7) font correspondre un nouvel ellipsoïde, et à trois diamètres conjugués de l'un des ellipsoïdes correspondent trois diamètres conjugués de l'autre. En particulier, à la sphère du premier espace, qui est définie par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1;$$

les formules (7) font correspondre un ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ que nous appellerons *le premier ellipsoïde de déformation relatif au point* P (²). Cet ellipsoïde étant supposé à axes inégaux, il existe un système et un seul de trois diamètres rectangulaires de la sphère considérée qui se transforment par (7) en trois droites rectangulaires : ce sont les diamètres qui se trans-

---

(¹) Et généralement un seul en ne considérant pas comme différents du premier ceux dont les arêtes sont situées sur les mêmes droites que celles sur lesquelles sont situées les arêtes du premier.

(²) CAUCHY, *Sur la condensation et la dilatation des corps solides. Exercices de Mathématiques.* Vol. II, p. 60-69; 1827.

forment dans les axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$. De même, à la sphère du second espace, qui est définie par l'équation

$$(X_1 - a_{10})^2 + (Y_1 - a_{20})^2 + (Z_1 - a_{30})^2 = 1,$$

correspond l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ défini par l'équation

$$(1 + 2\varepsilon_1)X^2 + (1 + 2\varepsilon_2)Y^2 + (1 + 2\varepsilon_3)Z^2 + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY = 1$$

et que nous appellerons le *second ellipsoïde de déformation relatif au point* P [1]. Ses axes correspondent à trois diamètres rectangulaires de la sphère correspondante.

Ainsi, en général, il existe un trièdre trirectangle et un seul, celui formé des axes du second ellipsoïde de déformation, qui se transforme en un nouveau trièdre trirectangle, savoir celui formé des axes du premier ellipsoïde de déformation.

On peut, de plusieurs façons, par une rotation, suivie de la translation de composantes a_{10}, a_{20}, a_{30}, appliquer les trois axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ sur les axes correspondants de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$. Parmi ces rotations nous distinguerons celle pour laquelle les trois arêtes d'un trièdre formé avec les axes de $\mathcal{E}$ s'appliquent finalement sur les trois arêtes *qui leur correspondent par* (7) et qui appartiennent à un trièdre formé avec les axes de $\mathcal{E}_1$. Cette rotation sera ce que nous appellerons la *rotation au point* P *du milieu.*

Pour que cette dernière rotation soit nulle, il faut (mais cette condition n'est pas suffisante, d'après ce que nous venons de dire) que les directions des axes du second ellipsoïde de déformation soient aussi celles que (7) laisse invariables. Comme on le voit immédiatement, ceci revient à dire que l'on a

$$a_{23} = a_{32}, \qquad a_{31} = a_{13}, \qquad a_{12} = a_{21}.$$

Si ces conditions sont remplies, on peut affirmer simplement que les deux ellipsoïdes de déformation ont mêmes axes. La déformation homo-

(1) W. Thomson et Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I. Part I, p. 130.

gène correspondante est ce que Lord Kelvin et Tait ont appelé une *déformation pure* (¹).

6. *Décomposition de la déformation en un point du milieu en une rotation suivie d'une déformation pure. Détermination de la rotation en un point du milieu.*

Étant donnée une déformation homogène définie par les formules (5) ou (7) où entrent douze constantes, nous pouvons nous proposer de la remplacer par une autre déformation homogène *équivalente,* définie par des équations où entrent des constantes en nombre moindre et, en particulier, en nombre égal à six.

Ce dernier problème a évidemment une infinité de solutions; nous pouvons en distinguer de particulièrement intéressantes.

La déformation déterminée par les équations (7) peut être remplacée par une rotation définie par les formules

$$(9)\qquad \begin{cases} X' = a\,X + b\,Y + c\,Z, \\ Y' = a'X + b'Y + c'Z, \\ Z' = a''X + b''Y + c''Z, \end{cases}$$

où a, b, c, ... désignent les coefficients d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$, *suivie* de la déformation homogène déterminée par les équations

$$(9')\qquad \begin{cases} X_1 = a_{10} + (1 + a'_{11})X' + a'_{12}Y' + a'_{13}Z', \\ Y_1 = a_{20} + a'_{21}X' + (1 + a'_{22})Y' + a'_{23}Z', \\ Z_1 = a_{30} + a'_{31}X' + a'_{32}Y' + (1 + a'_{33})Z', \end{cases}$$

où les coefficients a'_{ij} ont pour valeurs

(¹) W. THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy,* Vol. I, Part I, p. 132. Nous conservons encore ici les constantes a_{10}, a_{20}, a_{30}, dont on peut faire abstraction, si l'on n'a égard qu'à la déformation et si l'on néglige une translation.

$$
(10)\quad \begin{cases}
1+a'_{11}= a\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+ b\dfrac{\partial u}{\partial y}+c\dfrac{\partial u}{\partial z},\\
a'_{21}= a\dfrac{\partial v}{\partial x}+b\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+c\dfrac{\partial v}{\partial z},\\
a'_{31}= a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right),\\
a'_{12}= a'\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+ b'\dfrac{\partial u}{\partial y}+c'\dfrac{\partial u}{\partial z},\\
1+a'_{22}= a'\dfrac{\partial v}{\partial x}+b'\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+c'\dfrac{\partial v}{\partial z},\\
a'_{32}= a'\dfrac{\partial w}{\partial x}+b'\dfrac{\partial w}{\partial y}+c'\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right),\\
a'_{13}= a''\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+ b''\dfrac{\partial u}{\partial y}+c''\dfrac{\partial u}{\partial z},\\
a'_{23}= a''\dfrac{\partial v}{\partial x}+b''\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+c''\dfrac{\partial v}{\partial z},\\
1+a'_{33}= a''\dfrac{\partial w}{\partial x}+b''\dfrac{\partial w}{\partial y}+c''\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right).
\end{cases}
$$

A la rotation (9) ne correspond aucune déformation, et à trois droites rectangulaires quelconques dans l'espace lieu de (X, Y, Z) correspondent trois droites rectangulaires dans l'espace lieu de (X', Y', Z'); par conséquent, si l'on veut que la déformation (9') soit une déformation pure, il faut et il suffit que la rotation (9) soit précisément une des rotations dont il a été question au numéro précédent et qui amènent les axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ sur ceux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$.

On voit donc que *la déformation au point* P *revient, et de plusieurs façons, à une rotation suivie d'une déformation pure* [1]. Dans l'*une* de ces décompositions, la rotation n'est autre que la rotation au point P; cette dernière est donc définie par les formules (9), où les cosinus forment *une* solution du problème qui consiste à déterminer 9 cosinus $a, b, c, \ldots$ vérifiant, outre les relations

$$
(11)\quad \begin{cases}
a^2+b^2+c^2=1, & a'a''+b'b''+c'c''=0\\
a'^2+b'^2+c'^2=1, & a''a+b''b+c''c=0\\
a''^2+b''^2+c''^2=1, & aa'+bb'+cc'=0
\end{cases}
\qquad \begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}=1,
$$

[1] La décomposition en une déformation pure *suivie* d'une rotation ne conduirait évidemment pas à des résultats essentiellement différents de ceux du texte.

les suivantes :

$$a'_{23} = a'_{32}, \qquad a'_{31} = a'_{13}, \qquad a'_{12} = a'_{21},$$

qui s'écrivent :

$$(12)\quad \begin{cases} a''\dfrac{\partial v}{\partial x} + b''\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + c''\dfrac{\partial v}{\partial z} = a'\dfrac{\partial w}{\partial x} + b'\dfrac{\partial w}{\partial y} + c'\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right), \\ a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} + c\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = a''\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + b''\dfrac{\partial u}{\partial y} + c''\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ a'\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + b'\dfrac{\partial u}{\partial y} + c'\dfrac{\partial u}{\partial z} = a\dfrac{\partial v}{\partial x} + b\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + c\dfrac{\partial v}{\partial z}, \end{cases}$$

ou encore, si on les ajoute après avoir multiplié leurs deux membres par a, a', a'', puis par b, b', b'', et enfin par c, c', c'',

$$(12')\quad \begin{cases} b\dfrac{\partial u}{\partial z} + b'\dfrac{\partial v}{\partial z} + b''\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = c\dfrac{\partial u}{\partial y} + c'\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + c''\dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ c\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + c'\dfrac{\partial v}{\partial x} + c''\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial u}{\partial z} + a'\dfrac{\partial v}{\partial z} + a''\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right), \\ a\dfrac{\partial u}{\partial y} + a'\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + a''\dfrac{\partial w}{\partial y} = b\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + b'\dfrac{\partial v}{\partial x} + b''\dfrac{\partial w}{\partial x}. \end{cases}$$

On peut donner de ce problème la solution suivante, qui met en évidence des résultats intéressants.

Remarquons que les relations (10) entraînent les suivantes :

$$(1+a'_{11})^2 + a'^2_{12} + a'^2_{13} = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$a'^2_{21} + (1+a'_{22})^2 + a'^2_{23} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2,$$

$$a'^2_{31} + a'^2_{32} + (1+a'_{33})^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,$$

$$a'_{21}a'_{31} + (1+a'_{22})a'_{32} + a'_{23}(1+a'_{33}) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$a'_{31}(1+a'_{11}) + a'_{32}a'_{12} + (1+a'_{33})a'_{13} = \frac{\partial w}{\partial x}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$(1+a'_{11})a'_{21} + a'_{12}(1+a'_{22}) + a'_{13}a'_{23} = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

dont nous désignerons respectivement les seconds membres par $1+2\varepsilon'_1$, $1+2\varepsilon'_2$, $1+2\varepsilon'_3$, γ'_1, γ'_2, γ'_3, et qui, jointes à

$$a'_{23} = a'_{32}, \qquad a'_{31} = a'_{13}, \qquad a'_{12} = a'_{21},$$

déterminent les inconnues a'_{ij}. On [illegible] 'une manière élégante les neuf relations précéden[illegible] s expriment que la

forme quadratique

$$(13)\quad (1-2\varepsilon'_1)X'^2+(1+2\varepsilon'_2)Y'^2+(1+2\varepsilon'_3)Z'^2+2\gamma'_1 Y'Z'+2\gamma'_2 Z'X'+2\gamma'_3 X'Y',$$

qui, on le voit immédiatement, se transformerait, en vertu de (9), en

$$(1-2\varepsilon_1)X^2+(1+2\varepsilon_2)Y^2+(1+2\varepsilon_3)Z^2+2\gamma_1 YZ+2\gamma_2 ZX+2\gamma_3 XY,$$

est identique à la suivante :

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f'}{\partial X'}\right)^2+\left(\frac{\partial f'}{\partial Y'}\right)^2+\left(\frac{\partial f'}{\partial Z'}\right)^2\right],$$

où f' désigne la forme quadratique

$$(1+a'_{11})X'^2+(1+a'_{22})Y'^2+(1+a'_{33})Z'^2+2a'_{23}Y'Z'+2a'_{31}Z'X'+2a'_{12}X'Y'.$$

Plaçons-nous dans le cas général. On peut, au moyen d'une substitution orthogonale, réduire la forme (13) à une somme de carrés ; cette substitution orthogonale revient géométriquement à rapporter le second ellipsoïde de déformation à ses axes principaux, et elle s'effectue au moyen de la résolution de l'équation du troisième degré en S,

$$(14)\quad \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_1-S & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1+2\varepsilon_2-S & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1+2\varepsilon_3-S \end{vmatrix}=0.$$

Soit

$$\begin{aligned} X' &= \alpha X'' + \beta Y'' + \gamma Z'', \\ Y' &= \alpha' X'' + \beta' Y'' + \gamma' Z'', \\ Z' &= \alpha'' X'' + \beta'' Y'' + \gamma'' Z'' \end{aligned}$$

cette substitution orthogonale ; la forme (13) devient

$$S_1 X''^2 + S_2 Y''^2 + S_3 Z''^2,$$

en désignant par S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation (14). Si f'' désigne ce que devient f' par l'effet de la substitution précédente, on doit avoir l'identité

$$S_1 X''^2 + S_2 Y''^2 + S_3 Z''^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f''}{\partial X''}\right)^2+\left(\frac{\partial f''}{\partial Y''}\right)^2+\left(\frac{\partial f''}{\partial Z''}\right)^2\right],$$

qui détermine f''. On doit prendre, pour y satisfaire,

$$f'' = \pm\sqrt{S_1}X''^2 \pm \sqrt{S_2}Y''^2 \pm \sqrt{S_3}Z''^2$$

et adopter l'une quelconque des différentes combinaisons de signes placés devant les radicaux. Connaissant f'', on a immédiatement f'. Si l'on veut, en particulier, distinguer, parmi les solutions, celle qui correspond à la rotation au point P, on prendra

$$f'' = \sqrt{S_1}X''^2 + \sqrt{S_2}Y''^2 + \sqrt{S_3}Z''^2.$$

Connaissant les inconnues auxiliaires a'_{ij}, on déterminera les 9 cosinus $a, b, c, \ldots$ par les formules (10), dont la résolution donne les formules suivantes.

Posons

$$\Delta = \frac{D(x_1, y_1, z_1)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

On aura

$$a = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}(1+a'_{11}) + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}a'_{21} + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}a'_{31}\right],$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}(1+a'_{11}) + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}a'_{21} + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}a'_{31}\right],$$

$$c = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}(1+a'_{11}) + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}a'_{21} + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}a'_{31}\right],$$

et des formules analogues pour $a', b', c', a'', b'', c''$.

Remarquons en passant la signification de Δ; l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, tracé autour de $P(x, y, z)$, devient après déformation

$$(|\Delta| + \eta)\,dx\,dy\,dz,$$

η tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de l'élément, en sorte que [1]

$$\Theta = |\Delta| - 1$$

est la *dilatation cubique au point* P.

Δ s'exprime aisément au moyen des composantes de la déformation au

---

[1] Il en résulte également que, pour un milieu dont la densité est ρ avant déformation au point (x, y, z), et ρ_1 après déformation au point (x_1, y_1, z_1), on a la relation : $\rho = \rho_1 \times |\Delta|$ qui est une des deux formes de l'*équation de continuité* considérée en Hydrodynamique.

point P; si l'on forme, en effet, son carré par la règle de multiplication des déterminants, il vient [1]

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1+2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1+2\varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

valeur du premier membre de l'équation (14) pour $S = 0$.

Connaissant les 9 cosinus $a, b, c, \ldots$, on en déduira la rotation correspondante au moyen des formules bien connues. Soient l, m, n les cosinus directeurs de l'axe de la rotation au point P, et soit ω l'angle de rotation; les formules (9) donnent immédiatement les trois relations

$$(15) \qquad \begin{cases} (a-1)l + bm + cn = 0, \\ a'l + (b'-1)m + c'n = 0, \\ a''l + b''m + (c''-1)n = 0, \end{cases}$$

qui sont compatibles et déterminent l, m, n. On a ensuite

$$(16) \qquad \cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{1+a+b'+c''}{4}.$$

On peut encore remarquer que si l'on envisage le trièdre $Ox'y'z'$ représentant la position que prend le trièdre $Oxyz$, quand on lui applique une rotation équipollente à la rotation au point P, le tableau des cosinus relatif à ce trièdre est

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

Si l'on pose

$$\lambda = l\sin\frac{\omega}{2}, \qquad \mu = m\sin\frac{\omega}{2}, \qquad \nu = n\sin\frac{\omega}{2}, \qquad \rho = \cos\frac{\omega}{2},$$

[1] Comparer Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 55.

on a les formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues (1) :

$$a = \rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, \quad b = 2(\lambda\mu - \nu\rho), \quad c = 2(\lambda\nu + \mu\rho),$$
$$a' = 2(\lambda\mu + \nu\rho), \quad b' = \rho^2 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2, \quad c' = 2(\mu\nu - \lambda\rho),$$
$$a'' = 2(\lambda\nu - \mu\rho), \quad b'' = 2(\mu\nu + \lambda\rho), \quad c'' = \rho^2 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2.$$

7. *Transformation des composantes de la déformation en un point du milieu. Invariants de la déformation. Cas particuliers de déformation en un point : extension simple et glissement simple.*

La définition que nous avons donnée des composantes de la déformation en un point du milieu dépend des axes coordonnés. Si l'on considère de nouveaux axes, on aura six nouvelles composantes qui seront fonctions des anciennes et dont il est facile de trouver les expressions.

Soit

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

le tableau de transformation qui définit les cosinus directeurs des nouveaux axes. Soient x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées, pour ces nouveaux axes, des points (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1). On a

$$dx_1'^2 + dy_1'^2 + dz_1'^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$$
$$= (1 + 2\varepsilon_1)dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2)dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3)dz^2 + 2\gamma_1 dy\,dz + 2\gamma_2 dz\,dx + 2\gamma_3 dx\,dy$$

et

$$dx = a\,dx' + b\,dy' + c\,dz',$$
$$dy = a'\,dx' + b'\,dy' + c'\,dz',$$
$$dz = a''\,dx' + b''\,dy' + c''\,dz'.$$

---

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 435. — KŒNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 196.

On a donc

$$dx_1'^2 + dy_1'^2 + dz_1'^2 = (1 + 2\varepsilon_1')dx'^2 + (1 + 2\varepsilon_2')dy'^2 + (1 + 2\varepsilon_3')dz'^2 + 2\gamma_1' dy'dz' + 2\gamma_2' dz'dx' + 2\gamma_3' dx'dy',$$

en posant

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= \varepsilon_1 a^2 + \varepsilon_2 a'^2 + \varepsilon_3 a''^2 + \gamma_1 a'a'' + \gamma_2 a''a + \gamma_3 aa',\\
\varepsilon_2' &= \varepsilon_1 b^2 + \varepsilon_2 b'^2 + \varepsilon_3 b''^2 + \gamma_1 b'b'' + \gamma_2 b''b + \gamma_3 bb',\\
\varepsilon_3' &= \varepsilon_1 c^2 + \varepsilon_2 c'^2 + \varepsilon_3 c''^2 + \gamma_1 c'c'' + \gamma_2 c''c + \gamma_3 cc',\\
\gamma_1' &= 2\varepsilon_1 bc + 2\varepsilon_2 b'c' + 2\varepsilon_3 b''c'' + \gamma_1(b'c'' + b''c') + \gamma_2(b''c + bc'') + \gamma_3(bc' + b'c),\\
\gamma_2' &= 2\varepsilon_1 ca + 2\varepsilon_2 c'a' + 2\varepsilon_3 c''a'' + \gamma_1(c'a'' + c''a') + \gamma_2(c''a + ca'') + \gamma_3(ca' + c'a),\\
\gamma_3' &= 2\varepsilon_1 ab + 2\varepsilon_2 a'b' + 2\varepsilon_3 a''b'' + \gamma_1(a'b'' + a''b') + \gamma_2(a''b + ab'') + \gamma_3(ab' + a'b).
\end{aligned}$$

Telles sont les formules cherchées [1].

On peut remarquer que si l'on considère le second ellipsoïde de déformation

$$(1 + 2\varepsilon_1)X^2 + (1 + 2\varepsilon_2)Y^2 + (1 + 2\varepsilon_3)Z^2 + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY = 1,$$

et si l'on remplace dans son équation X, Y, Z par

$$\begin{aligned}
X &= a\,X' + b\,Y' + cZ',\\
Y &= a'X' + b'Y' + c'Z',\\
Z &= a''X' + b''Y' + c''Z',
\end{aligned}$$

la nouvelle équation est

$$(1 + 2\varepsilon_1')X'^2 + (1 + 2\varepsilon_2')Y'^2 + (1 + 2\varepsilon_3')Z'^2 + 2\gamma_1' Y'Z' + 2\gamma_2' Z'X' + 2\gamma_3' X'Y' = 1.$$

Il en résulte que les expressions

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),\\
4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2
\end{gathered}$$

restent inaltérées par une transformation de coordonnées.

Parmi les déformations homogènes, deux sont particulièrement intéressantes.

---

(1) Comparer LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 40, 41.

Dans la première, appelée *extension simple*, les lignes parallèles à une direction donnée sont dilatées et toutes les lignes perpendiculaires restent invariables en longueur. D'après ce qui précède, les conditions pour que la déformation en un point soit une extension simple sont [1]

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = 0,$$
$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 = 0$$

et la grandeur de cette extension simple est

$$e = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)} - 1.$$

La seconde déformation homogène, que nous devons aussi signaler et dont Vicat [2] et Barré de Saint-Venant [3] ont, les premiers, montré l'importance, est le *glissement simple*. Dans cette déformation, tous les points dans un certain plan restent dans ce plan après la déformation, avec leurs positions primitives, et tous les points dans un plan parallèle au premier restent dans leur plan, mais y sont déplacés, dans des directions parallèles à une ligne donnée dans le premier plan, proportionnellement à leurs distances à ce plan.

Les formules définissant un glissement simple des plans $y' =$ const. parallèlement à l'axe des x' du trièdre coordonné $O'x'y'z'$ sont

$$x'_1 = x' + gy', \qquad y'_1 = y', \qquad z'_1 = z',$$

g étant la grandeur du glissement. Les composantes de la déformation sont

$$\varepsilon'_1 = 0, \qquad \varepsilon'_2 = \frac{g^2}{2}, \qquad \varepsilon'_3 = 0, \qquad \gamma'_1 = 0, \qquad \gamma'_2 = 0, \qquad \gamma'_3 = g,$$

et les formules (6) du n° 3 donnent

$$\alpha'_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha'_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'_3\right) = g.$$

La grandeur d'un glissement simple, pour des axes de coordonnées quel-

---

(1) LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 41.

(2) VICAT, *Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1833, 2e semestre, p. 201-268).

(3) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Leçons de Mécanique appliquée, faites en* 1837-1838, *à l'École des Ponts et Chaussées.*

$$\ldots = \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),$$

... que la déformation en un point soit un glissement

$$\ldots\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 = 0,$$
$$\ldots + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

... la déformation résultant de deux glissements simples suc- ... des plans $y' =$ const. parallèlement à l'axe des x', l'autre des ...const. parallèlement au même axe des x'. Les formules définis- ...formation résultante seront

$$x'_1 = x' + gy' + hz', \qquad y'_1 = y', \qquad z'_1 = z',$$

... étant les grandeurs des deux glissements. Les composantes de la ...mation résultante seront

$$\varepsilon'_1 = 0, \qquad \varepsilon'_2 = \frac{g^2}{2}, \qquad \varepsilon'_3 = \frac{h^2}{2}, \qquad \gamma'_1 = gh, \qquad \gamma'_2 = h, \qquad \gamma'_3 = g.$$

On voit immédiatement que cette déformation résultante est elle-même un glissement simple, dont la grandeur est $\pm\sqrt{g^2 + h^2}$.

Il est également facile de voir que deux extensions simples, suivant des directions rectangulaires et dont les grandeurs e, f sont telles que

$$(1 + e)(1 + f) = 1,$$

produisent un glissement simple dont la grandeur est

$$g = \pm(e - f)\ (^2).$$

---

(1) LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 42.

(2) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Leçons de Mécanique appliquée, faites en* 1837-1838, *à l'École des Ponts et Chaussées.*

Les deux extensions simples rectangulaires produiraient aussi un glissement simple, de grandeur $g = \pm ef$, si l'on avait

$$(1 + e)(1 + f) = -1;$$

on pourra rapprocher cette remarque de celle faite au Chap. II, sur le signe de Δ.

On consultera avec grand intérêt, sur ce sujet de la composition et de la décomposition des déformations, W. THOMSON, *Mathematical and Physical Papers*, art. XCII : *Elasticity and Heat*, vol. III, p. 84, et W. THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Part I, p. 125, 133.

II. — De la déformation infiniment petite.

8. *Définition de la déformation infiniment petite.*

Envisageons un milieu qui se déforme d'une façon continue, et supposons, pour fixer les idées, que les différentes positions du milieu soient définies de la manière suivante. Dans les formules

$$x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w},$$

qui donnent les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la nouvelle position du point (x, y, z), les quantités u, v, w sont fonctions de x, y, z et d'une nouvelle variable t; nous supposerons que le milieu proposé corresponde, par exemple, à la valeur zéro du paramètre.

Lorsque t sera infiniment petit, les quantités variables avec la déformation, telles, par exemple, que les six fonctions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, différeront de leurs valeurs primitives de quantités infiniment petites. L'étude de la partie principale de tels infiniment petits constituera *ce que nous entendrons* par l'étude de la déformation infiniment petite du milieu considéré.

Supposons que u, v, w, fonctions de la variable t en même temps que de x, y, z, puissent être développées suivant les puissances entières positives de t; comme u, v, w doivent se réduire respectivement à zéro pour $t = 0$, nous aurons

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathrm{u} = u + u_1 + u_2 + \dots, \\ \mathrm{v} = v + v_1 + v_2 + \dots, \\ \mathrm{w} = w + w_1 + w_2 + \dots, \end{cases}$$

en désignant par u, v, w les termes de ces développements qui renferment t en facteur, et généralement par u_n, v_n, w_n ceux qui renferment t^{n+1} en facteur, en sorte que l'on ait

$$\begin{array}{llll} u = \mathrm{u}_1 t, & \dots, & u_n = \mathrm{u}_{n+1} t^{n+1}, & \dots, \\ v = \mathrm{v}_1 t, & \dots, & v_n = \mathrm{v}_{n+1} t^{n+1}, & \dots, \\ w = \mathrm{w}_1 t, & \dots, & w_n = \mathrm{w}_{n+1} t^{n+1}, & \dots, \end{array}$$

u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, ... étant des fonctions indépendantes de t, mais dépendant des variables x, y, z.

Pour simplifier l'exposition, nous supposerons que les séries (17) sont uniformément convergentes, ainsi que celles dont les termes s'en déduisent par différentiation par rapport à x, y, z.

9. *Dilatations linéaires et glissements relatifs à la déformation infiniment petite.*

Nous aurons, avec les notations précédentes,

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots, \qquad \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \ldots,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \ldots, \qquad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \ldots,$$
$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} + \ldots, \qquad \gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots,$$

les termes non écrits renfermant en facteur une puissance de t supérieure à la première.

Les dilatations linéaires au point P suivant Ox, Oy, Oz seront

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} + \ldots, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} + \ldots,$$

et les formules (6) du nº 3 donnent pour les dilatations angulaires au point P

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \ldots,$$
$$\frac{\pi}{2} - \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \ldots,$$
$$\frac{\pi}{2} - \alpha_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots.$$

On voit que lorsque t est suffisamment petit, les six composantes de la déformation en un point ont sensiblement pour valeurs les expressions

$$(18) \quad \begin{cases} e_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & e_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & e_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ g_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & g_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & g_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Les trois premières e_1, e_2, e_3 sont aussi sensiblement les valeurs des dilatations linéaires au point (x, y, z) suivant Ox, Oy, Oz; nous les appellerons les *dilatations linéaires relatives à la déformation infiniment petite* (¹). Les trois dernières g_1, g_2, g_3 sont de même sensiblement les valeurs des trois dilatations angulaires $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$, $\frac{\pi}{2} - \alpha_3$; nous les

(¹) Nous les appellerons simplement *dilatations linéaires* lorsque, dans une même question, on n'envisagera que la déformation infiniment petite et qu'il n'y aura ainsi aucune ambiguïté possible. La même remarque s'applique aux définitions qui vont suivre.

appellerons les *dilatations angulaires relatives à la déformation infiniment petite;* d'après le n° 6, nous pourrons encore les nommer *glissements relatifs à la déformation infiniment petite.*

Pour t tendant vers zéro, l'expression Δ du n° 6 tend vers 1; pour t suffisamment petit, la dilatation cubique est

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \ldots.$$

Sa valeur approchée

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

que nous appellerons *dilatation cubique relative à la déformation infiniment petite,* est égale à la somme des valeurs approchées des dilatations linéaires suivant les trois axes.

10. *Dilatations principales* (¹).

Parmi les directions issues de $P(x, y, z)$, il y en a trois particulièrement remarquables : ce sont les axes du second ellipsoïde de déformation. Les dilatations linéaires suivant ces axes sont dites *dilatations principales.* Si nous les désignons par Δ_1, Δ_2, Δ_3, les carrés des longueurs des axes du premier ellipsoïde de déformation seront

$$(1 + \Delta_1)^2, \quad (1 + \Delta_2)^2, \quad (1 + \Delta_3)^2,$$

et les carrés des axes du second ellipsoïde de déformation seront

$$\frac{1}{(1 + \Delta_1)^2}, \quad \frac{1}{(1 + \Delta_2)^2}, \quad \frac{1}{(1 + \Delta_3)^2}.$$

En désignant toujours par S_1, S_2, S_3 les racines de l'équation (14) du n° 5, on aura

$$S_1 = (1 + \Delta_1)^2, \qquad S_2 = (1 + \Delta_2)^2, \qquad S_3 = (1 + \Delta_3)^2,$$

et si l'on forme l'équation en S relative au *premier* ellipsoïde de déformation, ses racines seront, à un facteur près, les inverses de S_1, S_2, S_3.

Cherchons les développements de Δ_1, Δ_2, Δ_3, S_1, S_2, S_3 suivant les puissances de t. Pour $t = 0$, les trois racines de l'équation (14) sont égales à 1;

(¹) Comparer H. Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, p. 10 et suiv.

en posant

$$\mathfrak{D}_1 = \delta_1 + \dots, \qquad \mathfrak{D}_2 = \delta_2 + \dots, \qquad \mathfrak{D}_3 = \delta_3 + \dots,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ contiendront t en facteur, et l'on aura

$$S_1 = 1 + 2\delta_1 + \dots, \qquad S_2 = 1 + 2\delta_2 + \dots, \qquad S_3 = 1 + 2\delta_3 + \dots.$$

Or, si, dans l'équation (14), on remplace S par un développement dont les deux premiers termes sont $1, 2\delta$, savoir

$$1 + 2\delta + \dots,$$

on voit, après avoir divisé par t^3 et fait tendre t vers zéro, que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont les racines de l'équation en δ suivante :

$$\begin{vmatrix} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\delta & \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y} - 2\delta & \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} & 2\dfrac{\partial w}{\partial z} - 2\delta \end{vmatrix} = 0.$$

Nous appellerons $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les *dilatations principales relatives à la déformation infiniment petite.*

11. *Rotation relative à la déformation infiniment petite.*

Envisageons la rotation en un point du milieu; pour $t = 0$, elle se réduit évidemment à zéro, en sorte que des neuf cosinus, $a, b, c, \dots$ qui figurent dans les équations (9) du n° 6, trois, a, b', c'', se réduisent à 1 pour $t = 0$; les six autres se réduisent à zéro.

Développons ces neuf cosinus suivant les puissances de t; si l'on pose

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \tau_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

on trouve immédiatement, au moyen des relations (11) et (12), auxquelles satisfont, en général, les neuf cosinus, les développements suivants :

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{\tau_2^2 + \tau_3^2}{2} + \dots, & b &= -\tau_3 + \dots, & c &= \tau_2 + \dots, \\ a' &= \tau_3 + \dots, & b' &= 1 - \frac{\tau_3^2 + \tau_1^2}{2} + \dots, & c' &= -\tau_1 + \dots, \\ a'' &= -\tau_2 + \dots, & b'' &= \tau_1 + \dots, & c'' &= 1 - \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

avec

$$b'' + c' = \tau_2\tau_3 + \ldots, \qquad c + a'' = \tau_3\tau_1 + \ldots, \qquad a' + b = \tau_1\tau_2 + \ldots,$$

les termes non écrits renfermant en facteur une puissance de t supérieure à celle entrant dans les termes qui figurent.

La connaissance de τ_1, τ_2, τ_3 permet, on le voit, d'écrire les premiers termes des développements des neuf cosinus.

Les formules (9) du n° 6 mettent alors immédiatement en évidence que si l'on définit la rotation par un segment porté sur l'axe de rotation et égal à la grandeur ω de la rotation, les projections de ce segment seront

$$\tau_1 + \ldots, \quad \tau_2 + \ldots, \quad \tau_3 + \ldots.$$

C'est ce que montrent également les formules (15) et (16) du n° 6; les relations (15) nous font voir que, si l_0, m_0, n_0 désignent les valeurs de l, m, n pour $t = 0$, on a

$$\frac{l_0}{\tau_1} = \frac{m_0}{\tau_2} = \frac{n_0}{\tau_3}$$

et la formule (16) donne

$$\cos^2\frac{\omega}{2} = 1 - \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}{4} + \ldots,$$

d'où

$$\omega^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 + \ldots.$$

La rotation définie, de la manière qui vient d'être indiquée, par le segment dont les projections sont

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \tau_3,$$

est la *rotation relative à la déformation infiniment petite* au point (x, y, z); lorsque t est suffisamment petit, elle ne diffère pas sensiblement de la rotation au même point (x, y, z).

12. *Proposition classique relative au cas où les dilatations linéaires et les glissements relatifs à la déformation infiniment petite sont nuls.*

Pour terminer ces brèves indications sur la déformation infiniment petite, il nous reste à chercher ce que deviennent ici les propositions énoncées au n° 2 dans le cas général.

La notion du *système auxiliaire* de M. Darboux et les propositions que

[illegible] résultats [illegible]

Nous avons vu au n° 2 que le système d'équations aux dérivées partielles

$$[illegible]$$

définissant trois fonctions inconnues x, y, z, admettait une solution, et que cette solution correspondait au déplacement d'ensemble le plus général des différents points d'un corps invariable, ce déplacement étant combiné ou non avec une transformation par symétrie [2].

Appliquons au système précédent la notion du système auxiliaire de M. Darboux, en partant de la solution de ce système qui est formée de fonctions toutes nulles.

Le système auxiliaire sera, d'après ce que nous avons dit au n° 9, formé des six équations

$$[illegible]$$

définissant trois fonctions inconnues x, y, z; sa solution générale correspond aux solutions infiniment petites du système (1), et elle sera, par conséquent, définie par les formules

$$[illegible]$$

où [illegible] sont des constantes. Lesquelles formules déterminent

---

[illegible]

[illegible]

la vitesse d'un point x, y, z d'un système invariable à un instant donné.

Pour parler autrement, la solution générale du système (20) correspond au déplacement infiniment petit d'un point (x, y, z) d'un système invariable, dans un mouvement infiniment petit de ce système.

Nous retrouvons, on le voit, la proposition classique bien connue ([1]), qui est ainsi rattachée à sa véritable origine.

13. *Équations de Barré de Saint-Venant.*

Six fonctions quelconques de x, y, z ne peuvent pas représenter la déformation d'un milieu continu; elles doivent, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 2, vérifier un système d'équations aux dérivées partielles qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (3) du n° 1, où l'on considère ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 comme des fonctions données, déterminent des inconnues u, v, w.

On peut dire encore que l'intégrale générale du système dont nous venons de parler est définie par les formules (3) du n° 1, où u, v, w désignent des fonctions arbitraires. Considérons alors, en particulier, la solution qui correspond aux valeurs u = o, v = o, w = o de ces fonctions arbitraires, et qui est ainsi formée de fonctions toutes nulles, et formons, à l'égard de cette solution, le système auxiliaire de M. Darboux du système considéré. Ce système auxiliaire, considéré comme définissant six fonctions inconnues e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, admettra une intégrale générale qui sera définie par les formules (18) du n° 9, où u, v, w désignent des fonctions arbitraires. Donc

Six fonctions quelconques de x, y, z ne peuvent pas être prises pour représenter les dilatations linéaires et les glissements relatifs à une déformation infiniment petite; elles doivent vérifier un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (18) *du n°* 9, *où l'on considère e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 comme des fonctions données, déterminent des inconnues u, v, w; ce système n'est autre que le système auxiliaire,*

([1]) Consulter, en particulier, sur ce sujet : W.-J. IBBETSON, *An elementary Treatise on the Mathematical Theory of perfectly elastic Solids*, p. 266; 1887. — H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 13 et suiv.; 1892. — A.-E.-H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, p. 121; 1892. — E. CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, p. 15; 1894. — G. KOENIGS, *Leçons de Cinématique professées à la Faculté des Sciences de Paris*, § 35, p. 107 et suiv.; 1895.

formé à l'égard de la solution constituée de fonctions toutes nulles, du système auquel satisfont les six fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *associées à une déformation quelconque.*

Les équations auxquelles satisfont les six fonctions associées à une déformation infiniment petite ont été données pour la première fois par Barré de Saint-Venant (¹); lorsque nous introduirons les coordonnées curvilignes, nous verrons qu'on peut former facilement les équations auxquelles satisfont les six fonctions associées à une déformation quelconque, et le procédé, employé au Chapitre IV pour former les équations de Barré de Saint-Venant, reviendra au fond à former le système auxiliaire de M. Darboux. On peut, pour établir ces mêmes équations, étudier directement le système (18) du n° 9, ainsi que l'ont fait, par exemple, MM. Boussinesq (²) et Beltrami (³), et ainsi que le font les auteurs de différents *Traités d'Élasticité* (⁴). Nous allons reproduire ici l'une des démonstrations de M. Beltrami; elle est identique à celle à laquelle nous serons conduits au Chapitre IV par l'emploi du trièdre mobile.

Introduisons comme inconnues auxiliaires les composantes τ_1, τ_2, τ_3 de la rotation relative à la déformation infiniment petite; nous obtiendrons le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = e_1, &&\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g_3}{2} + \tau_3, &&\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{g_2}{2} - \tau_2,\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g_3}{2} - \tau_3, &&\frac{\partial v}{\partial y} = e_2, &&\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{g_1}{2} + \tau_1,\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g_2}{2} + \tau_2, &&\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g_1}{2} - \tau_1, &&\frac{\partial w}{\partial z} = e_3.
\end{aligned}$$

(¹) NAVIER, *Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines.* 3ᵉ édition, avec des Notes et des Appendices, par M. Barré de Saint-Venant; 1864.

(²) J. BOUSSINESQ, *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 2ᵉ série, t. XVI; 1871).

(³) BELTRAMI, *Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell* (*Nota in fondo; Memorie di Bologna,* 1886). *Note fisico-matematiche* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* t. III, p. 67; 1889). *Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu* (*Comptes rendus,* t. CVIII, p. 502; 1889).

(⁴) Consulter, en particulier : LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,* p. 121 et suiv. — CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità,* p. 18 et suiv.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des fonctions u, v, w, lorsque τ_1, τ_2, τ_3 sont supposées connues, s'obtiennent en écrivant

$$\frac{\partial e_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_3}{2} - \tau_3\right), \qquad \frac{\partial e_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_2}{2} + \tau_2\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_3}{2} - \tau_3\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g_2}{2} + \tau_2\right),$$

et six relations analogues.

Les neuf relations obtenues se résolvent immédiatement par rapport aux dérivées partielles de τ_1, τ_2, τ_3 et les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de u, v, w sont celles qui expriment que le système suivant

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \tau_1}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x} = \dfrac{\partial e_1}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial x} - \dfrac{\partial e_1}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \tau_1}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial y} - \dfrac{\partial e_2}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial y} = \dfrac{\partial e_2}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \tau_1}{\partial z} = \dfrac{\partial e_3}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_2}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial z} - \dfrac{\partial e_3}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_3}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial y}, \end{array}\right.$$

déterminant les auxiliaires τ_1, τ_2, τ_3, est compatible (¹). Nous obtenons ainsi les six équations de Barré de Saint-Venant,

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 e_2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 e_3}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 g_1}{\partial y\,\partial z} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_1}{\partial y\,\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{\partial g_3}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 e_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 g_2}{\partial z\,\partial x} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_2}{\partial z\,\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y} - \dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 g_3}{\partial x\,\partial y} = 0, & 2\dfrac{\partial^2 e_3}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial g_3}{\partial z} - \dfrac{\partial g_1}{\partial x} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right) = 0. \end{array}\right.$$

(¹) Remarquons, en passant, que les considérations précédentes, appliquées au cas où les e_i et les g_i sont nuls, donnent la démonstration habituelle de la proposition qui fait l'objet du n° 12.

CHAPITRE II.

DE L'EFFORT A L'INTÉRIEUR D'UN MILIEU CONTINU.

---

14. *Définition de l'effort à l'intérieur d'un milieu continu. **Équations ordinaires qui s'y rapportent.***

Envisageons un milieu continu dont tous les points sont à la même température et qui, en présence de corps extérieurs ayant tous la même température que lui, a pris une position déformée et est en équilibre sous l'action de deux sortes de forces extérieures : des forces agissant sur la masse intérieure du milieu et des forces appliquées à sa surface.

Les forces agissant sur la masse du milieu seront définies, dans ce qui va suivre, de la façon suivante. Le milieu, dans sa position après la déformation, étant décomposé en éléments de volume, et le passage à la limite devant être effectué ultérieurement, nous supposons appliquée à chaque élément dV_1, en un point (x_1, y_1, z_1) de cet élément, une force ayant pour composantes

$$\rho_1 X\, dV_1(1+\eta'), \qquad \rho_1 Y\, dV_1(1+\eta''), \qquad \rho_1 Z\, dV_1(1+\eta'''),$$

ρ_1 désignant la densité, au point (x_1, y_1, z_1), du milieu déformé et η', η'', η''' tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de l'élément.

Nous dirons que X, Y, Z sont les projections sur les axes coordonnés de la *force appliquée au point* (x_1, y_1, z_1) et rapportée à l'unité de masse ; pour fixer les idées, on pourra supposer, par exemple, comme nous le ferons plus loin, que X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z, x_1, y_1, z_1, définies et continues pour tous les points du milieu.

Nous définirons les forces à la surface S_1 du milieu déformé, en nous donnant de même les projections F_1, G_1, H_1 de la *force appliquée au point* (x_1, y_1, z_1) de cette surface et rapportée à l'unité d'aire, en sorte que, la surface S_1 étant décomposée en éléments, et le passage à la limite devant être effectué ultérieurement, nous supposons appliquée à chaque élément $d\sigma_1$, au point (x_1, y_1, z_1) de cet élément, une force ayant pour composantes

$$F_1\, d\sigma_1(1+\zeta'), \qquad G_1\, d\sigma_1(1+\zeta''), \qquad H_1\, d\sigma_1(1+\zeta'''),$$

ζ', ζ'', ζ''' tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de l'élément.

A l'intérieur du milieu déformé, limité par la surface S_1, traçons une surface Σ_1 circonscrivant, soit seule, soit avec une portion de la surface S_1, une partie A_1 du milieu; soit B_1 ce qui reste du milieu en dehors de la partie A_1.

Imaginons que nous enlevions la partie B_1 du milieu, et que nous laissions la partie A_1 soumise aux forces extérieures qui agissaient sur elle. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire, et c'est celle que nous ferons dans la suite, consiste à supposer que l'on peut, d'une façon unique, et pour toute forme de Σ_1, maintenir la partie A_1 en équilibre au moyen d'une application auxiliaire et continue de forces à sa surface Σ_1; cette partie A_1 se trouvera ainsi en équilibre sous l'action de forces de même définition que celles qui sont supposées tenir en équilibre le corps entier. Soit $P_1 n_1$ la normale menée à Σ_1 en un point P_1 de cette surface, vers l'extérieur du domaine A_1; nous supposerons aussi (¹) que les projections

$$p_{n_1 x_1},\quad p_{n_1 y_1},\quad p_{n_1 z_1},$$

sur les axes coordonnés, de la force auxiliaire appliquée au point (x_1, y_1, z_1) de Σ_1 et rapportée à l'unité d'aire restent les mêmes lorsqu'on considère, au lieu de Σ_1, une autre surface qui lui est tangente au point (x_1, y_1, z_1); nous dirons alors que ces trois projections sont les *composantes de l'effort* (²), *par unité d'aire, au point* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *sur l'élément plan dont la normale est* $P_1 n_1$: la signification précise de cette définition est donnée par les indications qui la précèdent.

Par des raisonnements classiques et qu'il est inutile que nous reprenions, on trouve, en adoptant, comme nous avons commencé à le faire plus haut, la notation de Coriolis, les relations suivantes. On a d'abord, en désignant par l_1, m_1, n_1 les cosinus directeurs de la direction $P_1 n_1$, les formules

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{n_1 x_1} &= l_1 p_{x_1 x_1} + m_1 p_{y_1 x_1} + n_1 p_{z_1 x_1},\\ p_{n_1 y_1} &= l_1 p_{x_1 y_1} + m_1 p_{y_1 y_1} + n_1 p_{z_1 y_1},\\ p_{n_1 z_1} &= l_1 p_{x_1 z_1} + m_1 p_{y_1 z_1} + n_1 p_{z_1 z_1},\end{aligned}\right.$$

(¹) Consulter H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, § 38, p. 71-72.

(²) Le mot *effort* répond à l'expression anglaise *stress*, introduite très heureusement par Rankine dans la théorie de l'élasticité, et il est substitué aujourd'hui d'une manière presque générale aux dénominations de pression, tension, traction, force élastique. ..., employées autrefois par les mathématiciens et les ingénieurs.

où les premiers membres doivent être remplacés par F_1, G_1, H_1 à la surface du corps.

On a ensuite

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{x_1x_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{y_1x_1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial p_{z_1x_1}}{\partial z_1} + \rho_1 X = 0, \\ \dfrac{\partial p_{x_1y_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{y_1y_1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial p_{z_1y_1}}{\partial z_1} + \rho_1 Y = 0, \\ \dfrac{\partial p_{x_1z_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{y_1z_1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial p_{z_1z_1}}{\partial z_1} + \rho_1 Z = 0, \end{cases} \qquad (25)\quad \begin{cases} p_{y_1z_1} = p_{z_1y_1}, \\ p_{z_1x_1} = p_{x_1z_1}, \\ p_{x_1y_1} = p_{y_1x_1}. \end{cases}$$

Si l'on emploie la notation de Lamé, on introduira les six auxiliaires N_i, T_i définies par les formules

$$N_1 = p_{x_1x_1}, \qquad N_2 = p_{y_1y_1}, \qquad N_3 = p_{z_1z_1},$$
$$T_1 = p_{y_1z_1} = p_{z_1y_1}, \qquad T_2 = p_{z_1x_1} = p_{x_1z_1}, \qquad T_3 = p_{x_1y_1} = p_{y_1x_1}.$$

Rappelons aussi que M. Pearson a proposé récemment [1] une simplification commode de la notation de Coriolis; elle consiste à adopter la notation ombrale de M. Sylvester et à écrire

$$p_{x_1x_1} = \widehat{x_1x_1}, \qquad p_{x_1y_1} = p_{y_1x_1} = \widehat{x_1y_1} = \widehat{y_1x_1}, \qquad \dots.$$

15. *Transformation des équations du numéro précédent.*

Les équations qui précèdent sont relatives au cas où les variables indépendantes adoptées sont x_1, y_1, z_1; mais il est essentiel, au point de vue des applications, d'écrire aussi ces équations en adoptant pour variables x, y, z, c'est-à-dire les coordonnées du point du corps non déformé qui est venu en (x_1, y_1, z_1).

Cette transformation, qui est entièrement analogue à celle par laquelle on passe, en Hydrodynamique, des *équations d'Euler* aux *équations de Lagrange,* a été commencée par Kirchhoff dans le Mémoire que nous avons déjà cité au n° 2, et d'après les indications données par Barré de Saint-Venant dans la Note également citée au n° 2.

---

(1) I. Todhunter et K. Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials,* vol. I, p. 322. On trouvera, à la page que nous venons de citer de cet Ouvrage, un Tableau comparatif des différentes notations employées par les principaux auteurs dans la théorie de l'Élasticité.

Les résultats de Kirchhoff demandent à être légèrement modifiés pour être adaptés au cas général; nous allons reprendre la question et parvenir à des équations qui ont été données par M. Brillouin [1], en 1891, sous la forme que l'on trouvera ci-après dans le texte, et dont nous déduirons celles données par M. Boussinesq [2] en 1869.

Il nous suffit évidemment de raisonner, par exemple, sur le corps entier et de supposer que les équations (23) se rapportent à la surface du corps et que leurs premiers membres sont égaux à F_1, G_1, H_1.

Les équations (23), (24), en adoptant la notation de Lamé, peuvent alors être remplacées par la suivante

$$\begin{aligned}
&\iiint\left(\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial T_3}{\partial y_1}+\frac{\partial T_2}{\partial z_1}+\rho_1 X\right)\delta u\, dx_1\,dy_1\,dz_1\\
&+\iiint\left(\frac{\partial T_3}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial y_1}+\frac{\partial T_1}{\partial z_1}+\rho_1 Y\right)\delta v\, dx_1\,dy_1\,dz_1\\
&+\iiint\left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1}+\frac{\partial T_1}{\partial y_1}+\frac{\partial N_3}{\partial z_1}+\rho_1 Z\right)\delta w\, dx_1\,dy_1\,dz_1\\
&\qquad+\iint(F_1-l_1N_1-m_1T_3-n_1T_2)\delta u\, d\sigma_1\\
&\qquad+\iint(G_1-l_1T_3-m_1N_2-n_1T_1)\delta v\, d\sigma_1\\
&\qquad+\iint(H_1-l_1T_2-m_1T_1-n_1N_3)\delta w\, d\sigma_1=0,
\end{aligned}$$

où les variations δu, δv, δw sont supposées arbitraires.

Par des transformations faciles, la relation que nous venons d'écrire devient la suivante

$$\begin{aligned}
(26)\quad &\iiint\rho_1(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dx_1\,dy_1\,dz_1+\iint(F_1\delta u+G_1\delta v+H_1\delta w)d\sigma_1\\
&-\iiint\left[N_1\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial\delta v}{\partial y_1}+N_3\frac{\partial\delta w}{\partial z_1}+T_1\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\right.\\
&\qquad\left.+T_2\left(\frac{\partial\delta u}{\partial z_1}+\frac{\partial\delta w}{\partial x_1}\right)+T_3\left(\frac{\partial\delta v}{\partial x_1}+\frac{\partial\delta u}{\partial y_1}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1=0,
\end{aligned}$$

[1] M. BRILLOUIN, *Déformations homogènes finies. Énergie d'un corps isotrope* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1500-1502; 1891).

[2] J. BOUSSINESQ, *Théorie des ondes liquides périodiques*, p. 516 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XX).

dont les rapports avec le principe des vitesses virtuelles sont évidents ; car, si nous imposons au corps des liaisons qui le solidifient d'une manière invariable, et si δu, δv, δw désignent les accroissements de u, v, w, et par conséquent de x_1, y_1, z_1, dans une modification virtuelle compatible avec de telles liaisons, nous devrons avoir l'identité

$$(27) \qquad dx_1 d\delta u + dy_1 d\delta v + dz_1 d\delta w = 0,$$

ui exprime que la variation du carré de l'élément linéaire $dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$ du milieu déformé est nulle ; en annulant dans le premier membre de (27) les coefficients de dx_1^2, dy_1^2, ..., il vient alors

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta v}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} = 0,$$
$$\frac{\partial \delta w}{\partial y_1} + \frac{\partial \delta v}{\partial z_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta u}{\partial z_1} + \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta v}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u}{\partial y_1} = 0.$$

Cherchons la transformée de la relation (26), lorsqu'on prend x, y, z pour variables indépendantes.

La relation

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = (1 + 2\varepsilon_1) dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2) dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3) dz^2 + 2\gamma_1 dy dz + 2\gamma_2 dz dx + 2\gamma_3 dx dy,$$

qui est identique en vertu des relations (4) ou des relations (1), donne par la différentiation avec le signe δ

$$dx_1 d\delta u + dy_1 d\delta v + dz_1 d\delta w = \delta\varepsilon_1 dx^2 + \delta\varepsilon_2 dy^2 + \delta\varepsilon_3 dz^2 + \delta\gamma_1 dy dz + \delta\gamma_2 dz dx + \delta\gamma_3 dx dy,$$

c'est-à-dire

$$(28) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \delta u}{\partial x_1} dx_1^2 + \frac{\partial \delta v}{\partial y_1} dy_1^2 + \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} dz_1^2 + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y_1} + \frac{\partial \delta v}{\partial z_1}\right) dy_1 dz_1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial z_1} + \frac{\partial \delta w}{\partial x_1}\right) dz_1 dx_1 + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u}{\partial y_1}\right) dx_1 dy_1 \\ &= \delta\varepsilon_1 dx^2 + \delta\varepsilon_2 dy^2 + \delta\varepsilon_3 dz^2 + \delta\gamma_1 dy dz + \delta\gamma_2 dz dx + \delta\gamma_3 dx dy. \end{aligned}$$

Remplaçons dans le premier membre de cette nouvelle identité dx_1, dy_1, dz_1 par leurs valeurs données par les formules (4) du n° 1, et égalons

les coefficients de dx^2, dy^2, ...; il vient

$$
(29)\quad
\begin{cases}
\delta\varepsilon_1 = \dfrac{\partial\delta u}{\partial x_1}\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial\delta v}{\partial y_1}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial\delta w}{\partial z_1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\
\qquad + \left(\dfrac{\partial\delta u}{\partial z_1}+\dfrac{\partial\delta w}{\partial x_1}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial\delta v}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\delta u}{\partial y_1}\right)\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\
\delta\varepsilon_2 = \dfrac{\partial\delta u}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial\delta v}{\partial y_1}\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial\delta w}{\partial z_1}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y} + \ldots, \\
\delta\varepsilon_3 = \dfrac{\partial\delta u}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \dfrac{\partial\delta v}{\partial y_1}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \dfrac{\partial\delta w}{\partial z_1}\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\dfrac{\partial v}{\partial z}\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \ldots, \\
\delta\gamma_1 = 2\dfrac{\partial\delta u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial z} + 2\dfrac{\partial\delta v}{\partial y_1}\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\dfrac{\partial v}{\partial z} + 2\dfrac{\partial\delta w}{\partial z_1}\dfrac{\partial w}{\partial y}\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\qquad + \left(\dfrac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\left[\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + \ldots, \\
\delta\gamma_2 = 2\dfrac{\partial\delta u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial z}\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\dfrac{\partial\delta v}{\partial y_1}\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2\dfrac{\partial\delta w}{\partial z_1}\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x} \\
\qquad + \left(\dfrac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\left[\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \ldots, \\
\delta\gamma_3 = 2\dfrac{\partial\delta u}{\partial x_1}\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial\delta v}{\partial y_1}\dfrac{\partial v}{\partial x}\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\dfrac{\partial\delta w}{\partial z_1}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} \\
\qquad + \left(\dfrac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\dfrac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right)\left[\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + \left(1+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \ldots.
\end{cases}
$$

Δ désignant le déterminant considéré au n° 6, déterminons six nouvelles auxiliaires P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3 au moyen de la relation

$$
(30)\quad
\begin{aligned}
\Delta\Bigg[N_1\frac{\partial\delta u}{\partial x_1} + N_2\frac{\partial\delta v}{\partial y_1} + N_3\frac{\partial\delta w}{\partial z_1} + T_1\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y_1}+\frac{\partial\delta v}{\partial z_1}\right) \\
+ T_2\left(\frac{\partial\delta u}{\partial z_1}+\frac{\partial\delta w}{\partial x_1}\right) + T_3\left(\frac{\partial\delta v}{\partial x_1}+\frac{\partial\delta u}{\partial y_1}\right)\Bigg] \\
= P_1\delta\varepsilon_1 + P_2\delta\varepsilon_2 + P_3\delta\varepsilon_3 + U_1\delta\gamma_1 + U_2\delta\gamma_2 + U_3\delta\gamma_3,
\end{aligned}
$$

supposée vérifiée identiquement en vertu de (28) ou des formules (29), c'est-à-dire en posant

$$
\left\{
\begin{aligned}
N_1 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & P_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + P_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + P_3\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \\
& + 2U_1\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + 2U_2\frac{\partial u}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2U_3\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\Bigg\}, \\
N_2 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & P_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + P_2\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + P_3\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \\
& + 2U_1\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + 2U_2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + 2U_3\frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Bigg\}, \\
N_3 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & P_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + P_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + P_3\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\
& + 2U_1\frac{\partial w}{\partial y}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2U_2\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x} + 2U_3\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\Bigg\}, \\
T_1 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & P_1\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + P_2\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + P_3\frac{\partial v}{\partial z}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
& + U_1\left[\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right] \\
& + U_2\left[\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + U_3\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right]\Bigg\}, \\
T_2 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & P_1\frac{\partial w}{\partial x}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + P_2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + P_3\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z} \\
& + U_1\left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\
& + U_2\left[\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right] + U_3\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\Bigg\}, \\
T_3 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & P_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + P_2\frac{\partial u}{\partial y}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + P_3\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \\
& + U_1\left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
& + U_2\left[\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right] + U_3\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{31}
$$

Désignons par ρ la densité du milieu *non déformé* au point (x, y, z); par $d\sigma$ l'élément de sa surface S correspondant à l'élément $d\sigma_1$ de S_1; par F, G, H les projections de la *force appliquée au point* (x_1, y_1, z_1) et rapportée

à l'unité d'aire de S, en sorte que, eu égard aux explications données au n° 14, les projections de la force à la surface S_1, sur ce qu'est devenu l'élément $d\sigma$ de S, sont

$$F\,d\sigma(1+\xi'),\qquad G\,d\sigma(1+\xi''),\qquad H\,d\sigma(1+\xi'''),$$

ξ', ξ'', ξ''' tendant uniformément vers zéro avec les dimensions de $d\sigma$.

La relation (26) prend alors la forme suivante

$$(32)\quad \begin{aligned}&\iiint \rho(X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,dx\,dy\,dz + \iint (F\,\delta u + G\,\delta v + H\,\delta w)\,d\sigma\\ &\quad - \iiint (P_1\,\delta\varepsilon_1 + P_2\,\delta\varepsilon_2 + P_3\,\delta\varepsilon_3 + U_1\,\delta\gamma_1 + U_2\,\delta\gamma_2 + U_3\,\delta\gamma_3)\,dx\,dy\,dz = 0,\end{aligned}$$

en supposant que Δ *est partout positif* (¹) et les intégrations étant étendues au corps *non déformé*.

Remplaçons dans cette relation ε_1, ε_2, ... par leurs valeurs (3) du n° 1; par des transformations faciles, on trouve que, si l'on pose

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
A_x &= P_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + U_3\frac{\partial u}{\partial y} + U_2\frac{\partial u}{\partial z},\\
A_y &= P_1\frac{\partial v}{\partial x} + U_3\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + U_2\frac{\partial v}{\partial z},\\
A_z &= P_1\frac{\partial w}{\partial x} + U_3\frac{\partial w}{\partial y} + U_2\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
B_x &= U_3\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + P_2\frac{\partial u}{\partial y} + U_1\frac{\partial u}{\partial z},\\
B_y &= U_3\frac{\partial v}{\partial x} + P_2\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + U_1\frac{\partial v}{\partial z},\\
B_z &= U_3\frac{\partial w}{\partial x} + P_2\frac{\partial w}{\partial y} + U_1\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
C_x &= U_2\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + U_1\frac{\partial u}{\partial y} + P_3\frac{\partial u}{\partial z},\\
C_y &= U_2\frac{\partial v}{\partial x} + U_1\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + P_3\frac{\partial v}{\partial z}.\\
C_z &= U_2\frac{\partial w}{\partial x} + U_1\frac{\partial w}{\partial y} + P_3\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right.$$

(¹) Nous nous bornons ici, comme on le fait d'habitude, au cas où Δ est partout positif: mais, s'il y avait intérêt à supposer le signe de Δ variable, suivant la région du corps, il n'y aurait que des changements faciles à apporter aux développements du texte. Nous n'insisterons pas actuellement sur ce point que l'on doit rapprocher des indications données plus loin au n° 27.

la relation (32) prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
&\iiint\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial B_x}{\partial y}+\frac{\partial C_x}{\partial z}+\rho X\right)\delta u\,dx\,dy\,dz\\
&+\iiint\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial C_y}{\partial z}+\rho Y\right)\delta v\,dx\,dy\,dz\\
&+\iiint\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}+\rho Z\right)\delta w\,dx\,dy\,dz\\
&\qquad+\iint(F-lA_x-mB_x-nC_x)\,\delta u\,d\sigma\\
&\qquad+\iint(G-lA_y-mB_y-nC_y)\,\delta v\,d\sigma\\
&\qquad+\iint(H-lA_z-mB_z-nC_z)\,\delta w\,d\sigma=0,
\end{aligned}$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale au point x, y, z de la surface S du milieu *non déformé*, menée vers l'extérieur.

Comme cette relation doit avoir lieu quelles que soient les variations δu, δv, δw, on doit avoir pour toutes les valeurs de x, y, z qui se rapportent aux points de l'intérieur du corps *non déformé*

$$(34)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial B_x}{\partial y}+\frac{\partial C_x}{\partial z}+\rho X=0,\\
&\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial C_y}{\partial z}+\rho Y=0,\\
&\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}+\rho Z=0,
\end{aligned}\right.$$

et pour toutes les valeurs de x, y, z qui se rapportent aux points de la surface du corps *non déformé*

$$(35)\qquad\left\{\begin{aligned}
F&=lA_x+mB_x+nC_x,\\
G&=lA_y+mB_y+nC_y,\\
H&=lA_z+mB_z+nC_z.
\end{aligned}\right.$$

Remarquons que les raisonnements précédents s'appliquent immédiatement à une portion quelconque du corps; on en déduit facilement la signification des nouvelles auxiliaires que l'on a introduites.

Si l'on considère, par exemple, A_x, A_y, A_z, il est clair que ce sont les composantes de l'effort qui s'exerce au point (x_1, y_1, z_1) sur une surface qui, avant déformation, avait pour normale au point (x, y, z) la parallèle à l'axe Ox des coordonnées; cet effort est rapporté à l'unité d'aire de la surface *non déformée*.

16. *Expressions des nouvelles auxiliaires* P_i, U_i, A_x, A_y, A_z, ..., *au moyen des* N_i, T_i.

Sans insister davantage sur ces interprétations, et sur celles qu'on pourrait donner des quantités P_i, U_i, remarquons que les formules (31) et (33) expriment les auxiliaires N_i, T_i, A_x, A_y, A_z, ... au moyen des six quantités P_i, U_i. Proposons-nous d'exprimer de même les auxiliaires P_i, U_i, A_x, A_y, A_z, ... au moyen des six quantités N_i, T_i.

Remarquons à cet effet que les formules (31), eu égard aux relations (33), entraînent les trois suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) A_x + \frac{\partial u}{\partial y} B_x + \frac{\partial u}{\partial z} C_x &= \Delta N_1, \\
\frac{\partial v}{\partial x} A_x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) B_x + \frac{\partial v}{\partial z} C_x &= \Delta T_3, \\
\frac{\partial w}{\partial x} A_x + \frac{\partial w}{\partial y} B_x + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) C_x &= \Delta T_2,
\end{aligned}$$

et six analogues que l'on obtient en remplaçant

$$A_x, \quad B_x, \quad C_x, \quad N_1, \quad T_3, \quad T_2,$$

respectivement par

$$A_y, \quad B_y, \quad C_y, \quad T_3, \quad N_2, \quad T_1,$$

puis par

$$A_z, \quad B_z, \quad C_z, \quad T_2, \quad T_1, \quad N_3.$$

On en déduit, en résolvant ces neuf relations par rapport à A_x, B_x, C_x, ...

$$
(36)\quad
\left\{
\begin{aligned}
A_x &= N_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}},\\
A_y &= T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + N_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}},\\
A_z &= T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + N_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}},\\
B_x &= N_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}},\\
B_y &= T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + N_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}},\\
B_z &= T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + N_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}},\\
C_x &= N_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}},\\
C_y &= T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + N_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}},\\
C_z &= T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + N_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}.
\end{aligned}
\right.
$$

On a ensuite les quantités P_i, U_i par la résolution des équations (33).

Les formules (34) et (35) présentent évidemment la plus grande analogie avec les équations (23) et (24); *mais les équations* (25) *n'ont pas ici leurs analogues;* les relations qui leur correspondent sont les trois suivantes ([1]) :

([1]) On pourra rapprocher ce résultat et ceux qui le précèdent des indications données par M. Poincaré, p. 77 et suiv. de ses *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*.

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} A_z + \left(1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) B_z + \dfrac{\partial v}{\partial z} C_z = \dfrac{\partial w}{\partial x} A_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} B_y + \left(1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) C_y, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} A_x + \dfrac{\partial w}{\partial y} B_x + \left(1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) C_x = \left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) A_z + \dfrac{\partial u}{\partial y} B_z + \dfrac{\partial u}{\partial z} C_z, \\ \left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) A_y + \dfrac{\partial u}{\partial y} B_y + \dfrac{\partial u}{\partial z} C_y = \dfrac{\partial v}{\partial x} A_x + \left(1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) B_x + \dfrac{\partial v}{\partial z} C_x, \end{cases}$$

auxquelles doivent satisfaire les neuf fonctions A_x, B_x, C_x, A_y, B_y, C_y, A_z, B_z, C_z et dont on pourra rapprocher la forme de celle des équations (12).

17. *Équations de M. Boussinesq.*

Remplaçons dans les équations (34) les fonctions A_x, B_x, C_x, ... par leurs valeurs (36) et remarquons que l'on a l'identité [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}\right) = 0,$$

et les deux que l'on en déduit en remplaçant u par v, puis par w; il vient alors l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial N_1}{\partial z}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} \\ &+ \frac{\partial T_3}{\partial x}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial T_3}{\partial y}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\partial T_3}{\partial z}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} \\ &+ \frac{\partial T_2}{\partial x}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} + \frac{\partial T_2}{\partial y}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} + \rho X = 0, \end{aligned}$$

et deux autres analogues qui s'en déduisent par une ou deux permutations circulaires effectuées sur x, y, z; u, v, w; X, Y, Z; N_1, N_2, N_3; T_1, T_2, T_3.

Les trois équations auxquelles nous venons de parvenir ne sont autres que celles qui ont été données par M. Boussinesq en 1869 [2]; on pourrait les obtenir d'une façon plus rapide en effectuant directement sur les équations (24) le changement de variables défini par les formules (1).

---

[1] Cette identité est déjà utilisée par C. Neumann dans le Mémoire cité plus loin, au n° 26.

[2] J. BOUSSINESQ, *Théorie des ondes liquides périodiques*, p. 516 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XX).

18. *Travail virtuel effectué par les forces extérieures appliquées au corps.*

En rapprochant ici les deux équations (26) et (32) qui résument soit les équations (23), (24), (25) du n° 14, soit les équations (34) et (35) du n° 15, nous voyons que les unes et les autres de ces dernières ne font qu'exprimer la condition suivante :

Quels que soient les déplacements virtuels donnés aux différents points du milieu déformé supposé en équilibre, le travail virtuel $\delta \mathfrak{T}_e$ *effectué par les forces extérieures appliquées au milieu est donné par la relation*

$$(38)\quad \delta \mathfrak{T}_e = \iiint \Big[N_1 \frac{\partial\, \delta u}{\partial x_1} + N_2 \frac{\partial\, \delta v}{\partial y_1} + N_3 \frac{\partial\, \delta w}{\partial z_1} + T_1 \Big(\frac{\partial\, \delta w}{\partial y_1} + \frac{\partial\, \delta v}{\partial z_1} \Big) + T_2 \Big(\frac{\partial\, \delta u}{\partial z_1} + \frac{\partial\, \delta w}{\partial x_1} \Big) + T_3 \Big(\frac{\partial\, \delta v}{\partial x_1} + \frac{\partial\, \delta u}{\partial y_1} \Big) \Big] dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(39)\quad \delta \mathfrak{T}_e = \iiint (P_1\, \delta\varepsilon_1 + P_2\, \delta\varepsilon_2 + P_3\, \delta\varepsilon_3 + U_1\, \delta\gamma_1 + U_2\, \delta\gamma_2 + U_3\, \delta\gamma_3)\, dx\, dy\, dz,$$

ou encore

$$(40)\quad \delta \mathfrak{T}_e = \iiint \Big(A_x\, \delta \frac{\partial u}{\partial x} + B_x\, \delta \frac{\partial u}{\partial y} + C_x\, \delta \frac{\partial u}{\partial z} + A_y\, \delta \frac{\partial v}{\partial x} + B_y\, \delta \frac{\partial v}{\partial y} + C_y\, \delta \frac{\partial v}{\partial z} + A_z\, \delta \frac{\partial w}{\partial x} + B_z\, \delta \frac{\partial w}{\partial y} + C_z\, \delta \frac{\partial w}{\partial z} \Big) dx\, dy\, dz.$$

Dans la formule (38), l'intégrale triple est étendue au milieu *déformé*, et dans les formules (39) et (40), au milieu *non déformé*.

19. *Surfaces isostatiques de Lamé. Remarque de M. Boussinesq. Recherches de M. Weingarten.*

Les équations (23) montrent qu'en chaque point (x_1, y_1, z_1) d'un milieu déformé, il existe trois éléments plans rectangulaires sur lesquels les efforts sont normaux, et qui, généralement, jouissent seuls de cette propriété. Si l'on considère en tous les points du milieu ces triples éléments, on peut se demander s'ils déterminent trois familles de surfaces orthogonales qui jouiraient ainsi de la propriété d'être normales aux efforts qui s'exercent sur elles. Lamé avait cru pouvoir affirmer, dans le cas général, l'existence de

ces familles de surfaces qu'il avait appelées *surfaces isostatiques* ([1]); cette proposition, qui a conduit l'illustre géomètre à créer les coordonnées curvilignes ([2]), est manifestement erronée, ainsi que l'a fait remarquer pour la première fois M. Boussinesq ([3]).

Pour donner une application de la première forme des équations relatives à l'effort à l'intérieur d'un milieu déformé, laquelle nous sera d'ailleurs utile dans la suite, nous exposerons la méthode extrêmement élégante suivie par M. Weingarten pour établir les conditions d'existence des surfaces isostatiques ([4]).

Soient a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 les cosinus directeurs des efforts qui sont normaux respectivement à trois éléments plans rectangulaires en un point du milieu. Pour que ces cosinus déterminent en chaque point du milieu trois directions qui coïncident avec les tangentes aux lignes d'intersection d'un système triple orthogonal, il faut et il suffit que l'on ait

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1\,dx_1 + a_2\,dy_1 + a_3\,dz_1 &= H_1\,d\rho_1,\\ b_1\,dx_1 + b_2\,dy_1 + b_3\,dz_1 &= H_2\,d\rho_2,\\ c_1\,dx_1 + c_2\,dy_1 + c_3\,dz_1 &= H_3\,d\rho_3,\end{aligned}\right.$$

H_1, H_2, H_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant des fonctions de x_1, y_1, z_1.

Les conditions d'existence d'un système isostatique s'obtiendront donc en exprimant que la substitution (41) entraîne les relations

$$(42)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = H_1^2\,d\rho_1^2 + H_2^2\,d\rho_2^2 + H_3^2\,d\rho_3^2,$$

$$(43)\qquad \begin{aligned} N_1\,dx_1^2 + N_2\,dy_1^2 + N_3\,dz_1^2 + 2T_1\,dy_1\,dz_1 + 2T_2\,dz_1\,dx_1 + 2T_3\,dx_1\,dy_1 \\ = M_1H_1^2\,d\rho_1^2 + M_2H_2^2\,d\rho_2^2 + M_3H_3^2\,d\rho_3^2,\end{aligned}$$

où M_1, M_2, M_3 désignent des fonctions de x_1, y_1, z_1.

M. Weingarten considère alors les six quantités n_1, n_2, n_3, t_1, t_2, t_3 défi-

---

([1]) G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 15e Leçon, § 148, p. 272 et suiv.

([2]) Lire la dernière ligne de la p. 273 et les deux premières lignes de la p. 274 des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

([3]) J. Boussinesq, *Lois géométriques de la distribution des pressions dans un solide homogène et ductile soumis à des déformations planes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 242; 1872).

([4]) J. Weingarten, *Zur Theorie der isostatischen Flächen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XC, p. 18-33; 1881).

nies par les formules (¹)

$$n_1 = \frac{\partial T_3}{\partial z_1} - \frac{\partial T_2}{\partial y_1}, \qquad n_2 = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - \frac{\partial T_3}{\partial z_1}, \qquad n_3 = \frac{\partial T_2}{\partial y_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_1},$$

$$2t_1 = \frac{\partial T_3}{\partial y_1} - \frac{\partial T_2}{\partial z_1} + \frac{\partial(N_3 - N_2)}{\partial x_1}, \qquad 2t_2 = \frac{\partial T_1}{\partial z_1} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_1 - N_3)}{\partial y_1},$$

$$2t_3 = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + \frac{\partial(N_2 - N_1)}{\partial z_1},$$

et il s'appuie sur cette proposition que, m_1, m_2, m_3 désignant certaines fonctions de ρ_1, ρ_2, ρ_3, la substitution (41) doit donner aussi

$$(44)\quad \begin{cases} n_1\,dx_1^2 + n_2\,dy_1^2 + n_3\,dz_1^2 + 2t_1\,dy_1\,dz_1 + 2t_2\,dz_1\,dx_1 + 2t_3\,dx_1\,dy_1 \\ \quad = m_1 H_2\,d\rho_2 H_3\,d\rho_3 + m_2 H_3\,d\rho_3 H_1\,d\rho_1 + m_3 H_1\,d\rho_1 H_2\,d\rho_2, \\ N'_1\,dx_1^2 + N'_2\,dy_1^2 + N'_3\,dz_1^2 + 2T'_1\,dy_1\,dz_1 + 2T'_2\,dz_1\,dx_1 + 2T'_3\,dx_1\,dy_1 \\ \quad = M_2 M_3 H_1^2\,d\rho_1^2 + M_3 M_1 H_2^2\,d\rho_2^2 + M_1 M_2 H_3^2\,d\rho_3^2, \\ n'_1\,dx_1^2 + n'_2\,dy_1^2 + n'_3\,dz_1^2 + 2t'_1\,dy_1\,dz_1 + 2t'_2\,dz_1\,dx_1 + 2t'_3\,dx_1\,dy_1 \\ \quad = m'_1 H_2\,d\rho_2 H_3\,d\rho_3 + m'_2 H_3\,d\rho_3 H_1\,d\rho_1 + m'_3 H_1\,d\rho_1 H_2\,d\rho_2, \end{cases}$$

où la forme $(N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 \between dx_1, dy_1, dz_1)^2$ est la forme adjointe de $(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 \between dx_1, dy_1, dz_1)^2$, et où l'on a

$$n'_1 = \frac{\partial T'_3}{\partial z_1} - \frac{\partial T'_2}{\partial y_1}, \qquad n'_2 = \frac{\partial T'_1}{\partial x_1} - \frac{\partial T'_3}{\partial z_1}, \qquad n'_3 = \frac{\partial T'_2}{\partial y_1} - \frac{\partial T'_1}{\partial x_1},$$

$$2t'_1 = \frac{\partial T'_3}{\partial y_1} - \frac{\partial T'_2}{\partial z_1} + \frac{\partial(N'_3 - N'_2)}{\partial x_1}, \qquad 2t'_2 = \frac{\partial T'_1}{\partial z_1} - \frac{\partial T'_3}{\partial x_1} + \frac{\partial(N'_1 - N'_3)}{\partial y_1},$$

$$2t'_3 = \frac{\partial T'_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T'_1}{\partial y_1} + \frac{\partial(N'_2 - N'_1)}{\partial z_1}.$$

Les équations (42), (43) sont, nous l'avons dit, nécessaires et suffisantes pour l'existence des surfaces isostatiques. Toutes les conséquences tirées de ces équations et des équations (44) représenteront par suite des conditions nécessaires pour l'existence de ces surfaces.

La considération simultanée des formes qui constituent les premiers membres de l'équation (43) et des équations (44) conduit immédiatement

(¹) Remarquons en passant que les considérations du texte ont leurs analogues dans l'étude géométrique faite, au Chapitre I, de la déformation d'un milieu continu et que les formes quadratiques qui sont envisagées ici prennent alors une forme très élégante.

à annuler les trois quantités suivantes :

$$(45)\quad \begin{cases} J_1 = N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + 2T_1 t_1 + 2T_2 t_2 + 2T_3 t_3, \\ J_2 = N_1 n'_1 + N_2 n'_2 + N_3 n'_3 + 2T_1 t'_1 + 2T_2 t'_2 + 2T_3 t'_3 \\ \quad = N'_1 n_1 + N'_2 n_2 + N'_3 n_3 + 2T'_1 t_1 + 2T'_2 t_2 + 2T'_3 t_3, \\ J_3 = N'_1 n'_1 + N'_2 n'_2 + N'_3 n'_3 + 2T'_1 t'_1 + 2T'_2 t'_2 + 2T'_3 t'_3. \end{cases}$$

Les trois équations

$$(46)\qquad J_1 = 0, \qquad J_2 = 0, \qquad J_3 = 0$$

sont, par suite, trois équations qui doivent être remplies pour que les surfaces isostatiques existent.

On obtient ainsi trois équations aux dérivées partielles du premier ordre, auxquelles sont assujetties les six quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3.

Montrons que ces trois équations sont des conditions suffisantes pour l'existence des surfaces isostatiques.

Posons

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (N_2 - S)(N_3 - S) - T_1^2, & \Theta_1 &= T_2 T_3 - (N_1 - S)T_1, \\ \Delta_2 &= (N_3 - S)(N_1 - S) - T_2^2, & \Theta_2 &= T_3 T_1 - (N_2 - S)T_2, \\ \Delta_3 &= (N_1 - S)(N_2 - S) - T_3^2, & \Theta_3 &= T_1 T_2 - (N_3 - S)T_3, \end{aligned}$$

S étant une arbitraire. Soit Δ_h^i le résultat de la substitution de M_i à S dans Δ_h; attribuons la même signification à Θ_h^i. La théorie des axes des quadriques montre que chacun des trois groupes de cosinus (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) satisfait à un système correspondant de neuf relations

$$\begin{aligned} k_1\alpha_1 &= \Delta_1^i, & k_1\alpha_2 &= \Theta_3^i, & k_1\alpha_3 &= \Theta_2^i, \\ k_2\alpha_1 &= \Theta_3^i, & k_2\alpha_2 &= \Delta_2^i, & k_2\alpha_3 &= \Theta_1^i, \\ k_3\alpha_1 &= \Theta_2^i, & k_3\alpha_2 &= \Theta_1^i, & k_3\alpha_3 &= \Delta_3^i, \end{aligned}$$

dans lesquelles les k_i désignent des grandeurs qui ne sont pas nulles.

Si l'on forme la somme

$$\begin{aligned} K = {} & \Delta_1\left(\frac{\partial\Theta_3}{\partial z_1} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1}\right) + \Delta_2\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\Theta_3}{\partial z_1}\right) + \Delta_3\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\right) \\ & + \Theta_1\left[\frac{\partial\Theta_3}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial z_1} + \frac{\partial(\Delta_1 - \Delta_2)}{\partial x_1}\right] + \Theta_2\left[\frac{\partial\Theta_1}{\partial z_1} - \frac{\partial\Theta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial(\Delta_1 - \Delta_3)}{\partial y_1}\right] \\ & + \Theta_3\left[\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial(\Delta_2 - \Delta_1)}{\partial z_1}\right], \end{aligned}$$

on reconnaît qu'elle est une fonction entière du second degré de S, et un calcul facile donne

$$K = J_3 - 2J_2S + J_1S^2.$$

Soit K_i la valeur que prend K lorsqu'on donne à S la valeur M_i. Il résulte des neuf relations précédentes qui déterminent les cosinus (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) que l'on a [1]

$$K_i = \sum m_h \left[\alpha_1\left(\frac{\partial m_h \alpha_2}{\partial z_1} - \frac{\partial m_h \alpha_3}{\partial y_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial m_h \alpha_3}{\partial x_1} - \frac{\partial m_h \alpha_1}{\partial z_1}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial m_h \alpha_1}{\partial y_1} - \frac{\partial m_h \alpha_2}{\partial x_1}\right)\right]$$
$$(h = 1, 2, 3),$$

et ainsi pour chaque valeur de i

$$\left[\alpha_1\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\right)\right]\sum m_h^2 = J_3 - 2J_2M_i + J_1M_i^2.$$

On déduit de là que, si les trois invariants J_1, J_2, J_3 s'annulent, on a les trois équations

$$(47) \quad \alpha_1\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial z_1} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial y_1}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (\alpha_k = a_k, b_k, c_k),$$

qui donnent un autre moyen d'exprimer que les trois directions α_1, α_2, α_3 coïncident avec les tangentes aux lignes d'intersection des surfaces d'un système triple orthogonal. Réciproquement, les équations (47) entraînent les équations (46), toutes les fois que deux des M_i ne sont pas égaux.

M. Weingarten a donné deux représentations symboliques très simples des équations (46). La première est la suivante :

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & x_1 & N_1x_1 + T_3y_1 + T_2z_1 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & y_1 & T_3x_1 + N_2y_1 + T_1z_1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & z_1 & T_2x_1 + T_1y_1 + N_3z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & x_1 & N'_1x_1 + T'_3y_1 + T'_2z_1 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & y_1 & T'_3x_1 + N'_2y_1 + T'_1z_1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & z_1 & T'_2x_1 + T'_1y_1 + N'_3z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

---

[1] Les valeurs 1, 2, 3 de l'indice i correspondent respectivement aux lettres a, b, c.

$$J_3 = \begin{vmatrix} N_1\frac{\partial}{\partial x_1} + T_3\frac{\partial}{\partial y_1} + T_2\frac{\partial}{\partial z_1} & x_1 & N'_1 x_1 + T'_3 y_1 + T'_2 z_1 \\ T_3\frac{\partial}{\partial x_1} + N_2\frac{\partial}{\partial y_1} + T_1\frac{\partial}{\partial z_1} & y_1 & T'_3 x_1 + N'_2 y_1 + T'_1 z_1 \\ T_2\frac{\partial}{\partial x_1} + T_1\frac{\partial}{\partial y_1} + N_3\frac{\partial}{\partial z_1} & z_1 & T'_2 x_1 + T'_1 y_1 + N'_3 z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

en convenant que les produits $\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 x_1, \ldots$ seront remplacés par $\frac{\partial \widehat{x_1 x_1}}{\partial x_1}, \ldots,$ c'est-à-dire (n° 14) par $\frac{\partial N_1}{\partial x_1}, \ldots.$

La seconde représentation s'obtient en multipliant chacun des déterminants précédents par le déterminant, égal en valeur absolue à l'unité, formé avec les neuf cosinus α_1, α_2, α_3. On obtient ainsi les résultats suivants

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + b_1\frac{\partial}{\partial y_1} + c_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)(a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1)(a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1) = 0,$$

$$\left(a_2\frac{\partial}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial}{\partial y_1} + c_2\frac{\partial}{\partial z_1}\right)(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1)(a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1) = 0,$$

$$\left(a_3\frac{\partial}{\partial x_1} + b_3\frac{\partial}{\partial y_1} + c_3\frac{\partial}{\partial z_1}\right)(a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1)(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1) = 0.$$

20. *Équations relatives à l'équilibre d'un corps ayant la forme d'un cylindre droit avant la déformation.*

Donnons maintenant une application de la seconde forme des équations relatives à l'effort à l'intérieur d'un milieu déformé, dont nous aurons aussi à employer les résultats plus tard.

Considérons un corps ayant la forme d'un cylindre droit avant la déformation, et prenons l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre.

Supposons qu'aucune force n'agisse sur la surface latérale du cylindre dans son état de déformation.

Multiplions par $dx\,dy$ les équations (34) et intégrons sur l'aire d'une section transversale quelconque du cylindre; nous aurons

$$\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial C_x}{\partial z}\right)dx\,dy + \int\!\!\int \rho X\,dx\,dy = 0,$$

$$\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)dx\,dy + \int\!\!\int \rho Y\,dx\,dy = 0,$$

$$\int\!\!\int\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)dx\,dy + \int\!\!\int \rho Z\,dx\,dy = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int (l\mathrm{A}_x + m\mathrm{B}_x)\,ds + \int\int \frac{\partial \mathrm{C}_x}{\partial z}\,dx\,dy + \int\int \rho \mathrm{X}\,dx\,dy = 0,$$
$$\int (l\mathrm{A}_y + m\mathrm{B}_y)\,ds + \int\int \frac{\partial \mathrm{C}_y}{\partial z}\,dx\,dy + \int\int \rho \mathrm{Y}\,dx\,dy = 0,$$
$$\int (l\mathrm{A}_z + m\mathrm{B}_z)\,ds + \int\int \frac{\partial \mathrm{C}_z}{\partial z}\,dx\,dy + \int\int \rho \mathrm{Z}\,dx\,dy = 0,$$

les intégrales curvilignes étant prises le long du contour de la section transversale. Puisque aucune force n'agit sur la surface latérale du cylindre, où l'on a $n = 0$, ces équations se réduisent d'après (35) à

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\int \mathrm{C}_x\,dx\,dy + \int\int \rho \mathrm{X}\,dx\,dy = 0,\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\int \mathrm{C}_y\,dx\,dy + \int\int \rho \mathrm{Y}\,dx\,dy = 0,\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\int \mathrm{C}_z\,dx\,dy + \int\int \rho \mathrm{Z}\,dx\,dy = 0, \end{cases}$$

C_x, C_y, C_z étant d'après les équations (35) les composantes de l'effort en un point de la section transversale sur cette section.

On peut donner à ces équations une autre forme très utile. Considérons un système de trois directions rectangulaires, variant d'une manière quelconque avec x, y, z, et définies par les cosinus (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c''). Posons

$$\mathfrak{X} = a\int\int \rho \mathrm{X}\,dx\,dy + a'\int\int \rho \mathrm{Y}\,dx\,dy + a''\int\int \rho \mathrm{Z}\,dx\,dy,$$
$$\mathfrak{Y} = b\int\int \rho \mathrm{X}\,dx\,dy + b'\int\int \rho \mathrm{Y}\,dx\,dy + b''\int\int \rho \mathrm{Z}\,dx\,dy,$$
$$\mathfrak{Z} = c\int\int \rho \mathrm{X}\,dx\,dy + c'\int\int \rho \mathrm{Y}\,dx\,dy + c''\int\int \rho \mathrm{Z}\,dx\,dy,$$

et

$$\mathfrak{N}_1 = a\int\int \mathrm{C}_x\,dx\,dy + a'\int\int \mathrm{C}_y\,dx\,dy + a''\int\int \mathrm{C}_z\,dx\,dy,$$
$$\mathfrak{N}_2 = b\int\int \mathrm{C}_x\,dx\,dy + b'\int\int \mathrm{C}_y\,dx\,dy + b''\int\int \mathrm{C}_z\,dx\,dy,$$
$$\mathfrak{T} = c\int\int \mathrm{C}_x\,dx\,dy + c'\int\int \mathrm{C}_y\,dx\,dy + c''\int\int \mathrm{C}_z\,dx\,dy.$$

Introduisons les quantités p_3, q_3, r_3 définies par les formules bien connues de Poisson

$$p_3 = \sum c\frac{\partial b}{\partial z} = -\sum b\frac{\partial c}{\partial z},$$
$$q_3 = \sum a\frac{\partial c}{\partial z} = -\sum c\frac{\partial a}{\partial z},$$
$$r_3 = \sum b\frac{\partial a}{\partial z} = -\sum a\frac{\partial b}{\partial z},$$

et les équations (48) deviendront

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial z} + \mathfrak{C}q_3 - \mathfrak{M}_2 r_3 + \mathfrak{X} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial z} + \mathfrak{M}_1 r_3 - \mathfrak{C}p_3 + \mathfrak{Y} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} + \mathfrak{M}_2 p_3 - \mathfrak{M}_1 q_3 + \mathfrak{Z} = 0, \end{cases}$$

Des équations (34) nous déduisons de même les équations suivantes, où les intégrales s'étendent encore à l'aire d'une section transversale du cylindre,

$$\begin{aligned} &\iint\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)(y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\,dx\,dy \\ &-\iint\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\,dx\,dy \\ &\quad +\iint \rho[(y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)Z - (\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)Y]\,dx\,dy = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial C_x}{\partial z}\right)(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\,dx\,dy \\ &-\iint\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right)(x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\,dx\,dy \\ &\quad +\iint \rho[(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)X - (x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)Z]\,dx\,dy = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)(x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\,dx\,dy \\ &-\iint\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial C_x}{\partial z}\right)(y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\,dx\,dy \\ &+\iint \rho[(x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)Y - (y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)X]\,dx\,dy = 0, \end{aligned}$$

$(\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0, \mathrm{w}_0)$ étant le déplacement du point où l'axe des z perce la section transversale.

Il est facile de voir, comme précédemment, que ces équations, eu égard

aux relations (37), peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$
(50)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial z} + \mathcal{H} q_3 - \mathcal{G}_2 r_3 + \mathcal{N}'_1 + \mathcal{L} = 0,\\
&\frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial z} + \mathcal{G}_1 r_3 - \mathcal{H} p_3 + \mathcal{N}'_2 + \mathcal{M} = 0,\\
&\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} + \mathcal{G}_2 p_3 - \mathcal{G}_1 q_3 + \mathcal{T}' + \mathcal{N} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

en posant

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \;& a\int\int \rho[(y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{Z} - (\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{Y}]\,dx\,dy\\
&+ a'\int\int \rho[(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{X} - (x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{Z}]\,dx\,dy\\
&+ a''\int\int \rho[(x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{Y} - (y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{X}]\,dx\,dy,
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 = \;& a\int\int [(y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{C}_z - (\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{C}_y]\,dx\,dy\\
&+ a'\int\int [(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0)\mathrm{C}_x - (x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{C}_z]\,dx\,dy\\
&+ a''\int\int [(x + \mathrm{u} - \mathrm{u}_0)\mathrm{C}_y - (y + \mathrm{v} - \mathrm{v}_0)\mathrm{C}_x]\,dx\,dy,
\end{aligned}
$$

. . . .

et en désignant par $\mathcal{N}'_1$, $\mathcal{N}'_2$, $\mathcal{T}'$ les quantités obtenues en remplaçant dans $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{T}$ les cosinus a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' respectivement par

$$
\begin{aligned}
&a'\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right) - a''\frac{d\mathrm{v}_0}{dz}, \quad a''\frac{d\mathrm{u}_0}{dz} - a\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right), \quad a\frac{d\mathrm{v}_0}{dz} - a'\frac{d\mathrm{u}_0}{dz};\\
&b'\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right) - b''\frac{d\mathrm{v}_0}{dz}, \quad b''\frac{d\mathrm{u}_0}{dz} - b\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right), \quad b\frac{d\mathrm{v}_0}{dz} - b'\frac{d\mathrm{u}_0}{dz};\\
&c'\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right) - c''\frac{d\mathrm{v}_0}{dz}, \quad c''\frac{d\mathrm{u}_0}{dz} - c\left(1 + \frac{d\mathrm{w}_0}{dz}\right), \quad c\frac{d\mathrm{v}_0}{dz} - c'\frac{d\mathrm{u}_0}{dz}.
\end{aligned}
$$

On reconnaît dans les équations (49) et (50) les équations d'équilibre des tiges minces données par Clebsch (1), étendues au cas général d'une tige droite de section quelconque déformée d'une manière quelconque.

On établirait de même les équations d'équilibre des plaques d'épaisseur quelconque qui sont sollicitées par des forces à la surface seulement sur leur bord (2); mais nous nous contenterons pour le moment des indications précédentes.

(1) Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Édition de Barré de Saint-Venant, p. 424 et suiv.

(2) Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Édition de Barré de Saint-Venant, p. 656 et suiv.

CHAPITRE III.

L'ÉNERGIE DE DÉFORMATION ET LES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES CORPS ÉLASTIQUES.

---

21. *Indication de la marche qui va être suivie, d'après deux Mémoires de Lord Kelvin.*

Dans le Chapitre précédent, nous avons appliqué les principes de la Mécanique des solides invariables à un milieu dont tous les points sont à la même température et qui, dans une position déformée, est en équilibre sous l'action de certaines forces et en présence de corps extérieurs ayant tous la même température que lui. Les hypothèses que nous avons faites sur le milieu et sur les forces laissent encore subsister un très grand degré de généralité.

Nous devons, actuellement, nous préoccuper d'introduire la notion de *corps parfaitement élastique*, et d'établir les équations que l'on emploie pour étudier l'équilibre d'un tel corps.

La voie que nous allons suivre a été indiquée, pour la première fois, par Lord Kelvin qui, après avoir rattaché, dans le Mémoire classique (¹), paru en avril 1855, la théorie de la déformation infiniment petite des solides élastiques de Green aux principes de la Thermodynamique, est revenu en 1863 sur la même question (²), pour montrer de quelle façon les mêmes principes conduisent à poser en équation le problème de la recherche des déplacements, de grandeur quelconque, des points d'un corps élastique sollicité par des forces données.

22. *Introduction du corps homogène dont les déformations sont homogènes; les deux lois fondamentales de la Thermodynamique.*

(¹) W. Thomson, *On the Thermo-elastic and Thermo-magnetic Properties of Matter*, Part I. (*Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 57-77.) Ce Mémoire a été réimprimé en 1878 dans le *Philosophical Magazine;* il est réimprimé également p. 291 et suivantes du vol. I des *Mathematical and Physical Papers* de Lord Kelvin.

(²) Dans le Mémoire intitulé : *General Theory of the Equilibrium of an Elastic Solid;* ce Mémoire forme un appendice à un Mémoire publié en 1863; il est reproduit dans le *Treatise on Natural Philosophy* et dans les *Mathematical and Physical Papers*, vol. III, p. 386 et suivantes.

Considérons d'abord, avec Lord Kelvin, un corps défini de la façon suivante : dans un état dit *état naturel,* nous le concevons sans déformation et homogène; toutes ses déformations, à partir de l'état naturel, sont homogènes et définies par des formules telles que (5); tous ses points ont la même température; la position du corps est ainsi définie par les paramètres a_{ik} qui figurent dans les formules (5); le corps reste homogène et son *état* est défini par les six composantes de déformation ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 rapportées à l'état naturel, et par la température absolue T, commune à tous ses points. Supposons de plus que, lorsque les sept paramètres ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, T restent compris entre des limites déterminées pour chacun d'eux, toute modification du corps qui est une suite continue d'états d'équilibre soit une modification réversible (1), et que, pour chacun des états que l'on considère, on puisse maintenir le corps dans cet état, au moyen d'un système unique de forces extérieures et en présence de corps extérieurs tous à la même température que lui; le système de forces est supposé défini, lorsqu'on connaît les valeurs des paramètres qui correspondent à l'état considéré.

Supposons qu'on applique à un pareil corps les deux principes de la Thermodynamique.

Le premier de ces principes est celui de l'*équivalence de la chaleur et du travail;* il s'énonce ainsi :

Soit δQ la quantité de chaleur reçue par le système durant une modification élémentaire quelconque; si les forces extérieures qui lui sont appliquées ont effectué un travail $\delta\mathfrak{T}_e$, en même temps que sa force vive $\sum \frac{mv^2}{2}$ a varié, on a la relation

$$E\,\delta Q + \delta\mathfrak{T}_e = \delta \sum \frac{mv^2}{2} + dU,$$

E étant une constante positive, l'équivalent mécanique de la chaleur, et dU

(1) Nous employons ici l'expression *modification réversible,* avec le sens que M. Duhem a si bien précisé. Consulter en particulier :

P. Duhem, *Étude sur les travaux thermodynamiques* de M. J. Willard Gibbs (*Bulletin des Sciences mathématiques,* t. XI, 1re Partie, p. 122, 159; 1887). — *Introduction à la Mécanique chimique*, Gand, 1893. — *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. VIII, p. 269; t. IX, p. 293; t. X, p. 203; 1895).

étant la différentielle exacte d'une fonction [1] U des paramètres, qui définissent l'*état* du corps; on appelle cette fonction l'*énergie interne* [2] du corps.

La seconde loi de la Thermodynamique, qu'on appelle le *principe de Carnot et de Clausius,* est ici la suivante :

Soit T la température absolue qui est commune à tous les points du corps, pendant que ce corps subit une modification élémentaire qui absorbe une quantité de chaleur δQ, et que sa force vive varie; on a l'inégalité

$$\text{(51)} \qquad E\,\delta Q - \delta \sum \frac{mv^2}{2} - ET\,dS < 0,$$

dS désignant la différentielle exacte d'une fonction S des paramètres qui définissent l'*état* du système; cette fonction porte le nom d'*entropie*.

Si la modification, au lieu d'être une modification réalisable, est une modification réversible, on doit remplacer l'inégalité précédente par la relation

$$\text{(52)} \qquad \delta Q - T\,dS = 0.$$

Remarquons que, en tenant compte de la première loi de la Thermodynamique, nous pouvons éliminer δQ et, en introduisant la fonction

$$\mathfrak{F} = U - EST,$$

c'est-à-dire le potentiel thermodynamique de M. Duhem, nous pouvons remplacer l'inégalité (51) par l'une des suivantes :

$$\text{(53)} \qquad \begin{cases} dU - ET\,dS - \delta \mathfrak{T}_e < 0, \\ d\mathfrak{F} + ES\,dT - \delta \mathfrak{T}_e < 0, \end{cases}$$

et la relation (52) par l'une des deux suivantes :

$$\text{(54)} \qquad dU - ET\,dS - \delta \mathfrak{T}_e = 0,$$

$$\text{(55)} \qquad d\mathfrak{F} + ES\,dT - \delta \mathfrak{T}_e = 0.$$

---

[1] Nous employons ici et dans la suite le mot *fonction* dans le sens qu'il a dans la Théorie des fonctions d'une variable réelle, en sorte que ce mot désigne une fonction uniforme dans tout le domaine que l'on considère.

[2] Cette définition diffère légèrement de celle de certains auteurs qui emploient le même nom pour désigner l'expression $\frac{U}{E}$.

23. ***Énergie de déformation du corps homogène considéré au numéro précédent.***

Il nous est maintenant facile d'établir la condition d'équilibre [1] du corps que nous envisageons actuellement.

Le corps étant supposé en équilibre dans un état particulier sous l'action de forces données, nous examinerons d'abord le cas où sa température peut être considérée comme connue.

Si nous considérons toutes les modifications réversibles du corps à partir de son état d'équilibre, il résulte des hypothèses faites que nous devons avoir, pour toutes les valeurs possibles des variations des paramètres qui fixent l'état du corps, la relation (55); inversement, cette condition est suffisante pour l'équilibre, car il résulte de l'inégalité (53) que, si pour toutes les modifications élémentaires du système, pris dans un certain état, on a

$$d\mathcal{F} + \mathrm{ES}\,d\mathrm{T} - \delta\mathfrak{T}_e \geqq 0,$$

aucune de ces modifications n'est possible, et le système demeure en équilibre dans l'état considéré.

Les coefficients qui figurent dans les formules (5) d'une déformation homogène sont ce que M. Duhem appelle des *variables normales*, en sorte que, dans le travail élémentaire $\delta\mathfrak{T}_e$ des forces extérieures, le coefficient de $d\mathrm{T}$ est nul.

Les conditions d'équilibre s'obtiennent donc en adjoignant à

$$(56)\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{T}} = -\mathrm{ES}$$

les relations obtenues en écrivant que l'on a, pour toutes les variations des paramètres,

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varepsilon_1}\delta\varepsilon_1 + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varepsilon_2}\delta\varepsilon_2 + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varepsilon_3}\delta\varepsilon_3 + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\gamma_1}\delta\gamma_1 + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\gamma_2}\delta\gamma_2 + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\gamma_3}\delta\gamma_3 = \delta\mathfrak{T}_e.$$

Mais la relation (56) peut être considérée comme déterminant la valeur de S; si nous faisons abstraction de cette relation, nous pouvons dire que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre s'obtient en écrivant que *la*

[1] Nous entendons ici le mot *équilibre* au sens employé par M. Duhem dans le *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*.

température T *du corps étant égale à la température donnée* T_0, *on a pour toute transformation élémentaire à température constante*

$$d\mathcal{F}_0 - \delta\mathcal{E}_e = 0,$$

$\mathcal{F}_0$ désignant la valeur de $\mathcal{F}$ pour $T = T_0$.

Passons maintenant au cas où l'entropie du corps peut être considérée comme ayant une valeur donnée S_0.

Effectuons un changement de variables dans lequel on conserve les paramètres autres que T, lequel est remplacé par S; U deviendra une nouvelle fonction que nous désignerons encore par U; en répétant le raisonnement précédent, mais en partant de la relation (54), au lieu de la relation (55), on trouve immédiatement que les conditions d'équilibre s'obtiennent en adjoignant aux relations

(57) $$S = S_0,$$

(58) $$\frac{\partial U}{\partial S} = ET$$

celles que l'on obtient en écrivant que l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1}\delta\varepsilon_1 + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2}\delta\varepsilon_2 + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_3}\delta\varepsilon_3 + \frac{\partial U}{\partial \gamma_1}\delta\gamma_1 + \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}\delta\gamma_2 + \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}\delta\gamma_3 = \delta\mathcal{E}_e,$$

pour toute variation des paramètres.

Si nous faisons abstraction de (57) et (58), qui déterminent S et T, on voit que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre s'obtient en écrivant que, pour toute transformation élémentaire à entropie constante, on a

$$dU_0 - \delta\mathcal{E}_e = 0,$$

U_0 étant la valeur de U pour $S = S_0$.

On peut résumer ce qui précède de la façon suivante :

Au corps homogène considéré au numéro précédent, et dans chacun des deux cas qui viennent d'être considérés, on peut associer une fonction W des six composantes de déformation ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 telle que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre dans un état déterminé et sous l'action de forces extérieures s'obtienne en écrivant que l'on a, pour toutes les variations des paramètres

$$\delta W - \delta\mathcal{E}_e = 0.$$

Cette fonction W diffère suivant le cas que l'on considère; nous lui donnerons, dans tous les cas, le nom d'*énergie de déformation* du corps considéré.

24. *Énergie de déformation en un point d'un corps homogène déformé d'une manière quelconque. Équilibre en un point.*

Considérons un corps qui, dans l'*état naturel,* c'est-à-dire dans l'état d'équilibre à partir duquel nous évaluons la déformation, est homogène; supposons que, sous l'action de forces extérieures, il soit en équilibre dans une position déformée.

Les composantes de la déformation ne sont pas constantes dans toute l'étendue du corps; mais on peut regarder comme sensiblement homogène la déformation subie par une portion suffisamment petite du corps entourant un point P (x, y, z); à ce que nous avons appelé la *déformation au point* P, nous sommes ainsi conduits à adjoindre la notion d'*énergie de déformation au point* P, rapportée à l'unité de volume du corps non déformé. A l'égard de cette énergie de déformation au point P, l'hypothèse la plus simple consiste à admettre qu'elle ne dépend que de la déformation en ce point, et que, lorsque le corps est homogène dans son état naturel, elle définit, pour toutes les positions de P, et dans les deux cas considérés au numéro précédent, une fonction

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

formée uniquement avec les six fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ associées à la déformation subie par le corps.

Si nous admettons alors, de plus, l'existence de l'effort à l'intérieur du corps, nous sommes finalement conduits, sans qu'il soit besoin de nouvelles explications, à parler de l'*équilibre au point* P, et, en vertu de la formule (39) du n° 18, à adjoindre, aux équations obtenues au Chapitre précédent, les suivantes :

$$(59)\qquad \left\{ \begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}, & P_2 &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2}, & P_3 &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3}, \\ U_1 &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_1}, & U_2 &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_2}, & U_3 &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_3}, \end{aligned} \right.$$

relatives à l'équilibre du corps.

Les formules (33) permettent de mettre les conditions (59) sous la

forme suivante :

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_x=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}, && B_x=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}, && C_x=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}},\\
&A_y=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}, && B_y=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}, && C_y=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}},\\
&A_z=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}, && B_z=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}, && C_z=\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (31) et la remarque du n° 16 donnent à leur tour les conditions sous l'une des formes suivantes, indiquées toutes deux par M. Boussinesq [1] :

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
N_1=\frac{1}{\Delta}\Bigg[&\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_3}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\gamma_1}\\
&+2\frac{\partial u}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial W}{\partial\gamma_2}+2\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial\gamma_3}\Bigg],\\
T_1=\frac{1}{\Delta}\Bigg\{&\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_2}+\frac{\partial v}{\partial z}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_3}\\
&+\left[\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\frac{\partial W}{\partial\gamma_1}\\
&+\left[\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial W}{\partial\gamma_2}+\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right]\frac{\partial W}{\partial\gamma_3}\Bigg\}
\end{aligned}\right.$$

et

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned}
N_1&=\frac{1}{\Delta}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right],\\
T_1&=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\right]\\
&=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\right],
\end{aligned}\right.$$

où nous n'avons écrit que les valeurs de N_1, T_1, celles de N_2, T_2, N_3, T_3 s'en déduisant par des changements faciles.

---

[1] J. BOUSSINESQ, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Note III, p. 591, 594 (Mémoire déjà cité aux n° 2, 13 et 17).

25. *Équations relatives à l'équilibre d'un corps homogène déformé d'une manière quelconque. Énergie de déformation.*

Les équations (34) et (35) deviennent, en vertu des formules (60), les suivantes :

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}\right)+\rho X=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}}\right)+\rho Y=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}}\right)+\rho Z=0; \end{cases}$$

$$(64)\quad \begin{cases} F=l\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}+m\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}+n\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}},\\ G=l\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}}+m\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}}+n\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}},\\ H=l\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}}+m\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}}+n\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}}. \end{cases}$$

Si l'on a égard aux formules (3) du n° 1 et si l'on suppose, pour fixer les idées, que X, Y, Z, F, G, H sont des fonctions données de x, y, z, x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire de x, y, z, u, v, w, les équations (63) sont des équations aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles doivent satisfaire les fonctions u, v, w de x, y, z, et les équations (64) sont des conditions à la limite pour ces mêmes fonctions.

Il résulte du n° 15 que les équations (63) et (64) reviennent à écrire que l'on a, pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw,

$$(65)\quad \iiint \delta W\,dx\,dy\,dz-\delta\mathcal{E}_e=0,$$

$\delta\mathcal{E}_e$ désignant la somme des travaux élémentaires virtuels des forces extérieures appliquées au corps, savoir

$$\delta\mathcal{E}_e=\iiint\rho(X\,\delta u+Y\,\delta v+Z\,\delta w)\,dx\,dy\,dz+\iint(F\,\delta u+G\,\delta v+H\,\delta w)\,d\sigma.$$

Nous donnerons à l'expression

$$\iiint W\,dx\,dy\,dz,$$

le nom d'*énergie de déformation* du corps considéré.

C'est ici le lieu de faire remarquer les modifications que pourrait recevoir l'exposition précédente, si l'on reprenait dans le cas actuel les développements donnés par M. Duhem à l'égard du potentiel thermodynamique d'un corps continu, en observant que l'une des hypothèses faites revient à dire que l'état du corps ne dépend pas de la position mutuelle de ses parties. Mais nous nous contenterons actuellement des développements précédents, quelque incomplets qu'ils soient.

26. *Remarque relative à un paradoxe signalé par M. Poincaré, ainsi qu'à des Mémoires de Kirchhoff, de C. Neumann et de M. Gustave Cellérier.*

Considérons un milieu continu, déformé et en équilibre sous l'action de forces extérieures, telles que celles considérées au n° 14 et pour lesquelles nous conserverons les mêmes notations; supposons que, pour toute position d'équilibre de ce corps, on ait pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw,

$$\iiint \delta\Phi\,dx\,dy\,dz - \delta\mathfrak{T}_e = 0, \tag{66}$$

Φ désignant une fonction donnée des neuf dérivées partielles de u, v, w par rapport à x, y, z et $\delta\mathfrak{T}_e$ ayant la même signification que dans la relation (65).

Ainsi que l'ont remarqué Kirchhoff ([1]) et Neumann ([2]), qui ont considéré en passant cette question, ceci revient à dire que l'on doit avoir, pour une position d'équilibre, les relations (63) et (64), dans lesquelles on remplacera la lettre W par la lettre Φ.

Supposons, de plus, que l'on admette l'existence de l'effort à l'intérieur du milieu considéré, et que la relation (66) s'applique à une portion quelconque du milieu; dans ces conditions, on devra avoir les relations (60), où la lettre W doit être remplacée par la lettre Φ.

Mais, ainsi que nous l'avons dit au n° 16, les neuf expressions A_x, B_x,

---

([1]) *Voir* le Mémoire déjà cité au n° 2.

([2]) C. NEUMANN, *Zur Theorie der Elasticität* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LVII, p. 281; 1860).

$C_x, \ldots$ ne peuvent pas être prises arbitrairement et doivent vérifier les relations (37). Il en résulte que la fonction Φ doit vérifier un système de trois équations aux dérivées partielles qui s'obtient en remplaçant, dans (37), $A_x, B_x, C_x, \ldots$ par leurs expressions au moyen de Φ. L'intégrale générale de ce système d'équations aux dérivées partielles est, ainsi que l'a remarqué M. G. Cellérier (¹), formée par une fonction arbitraire des six expressions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ définies par les formules (3) du n° 1; c'est du reste un résultat qui est *évident a priori*, si l'on remarque l'identité des deux expressions qui figurent sous les signes d'intégration dans les formules (39) et (40) du n° 18.

Ainsi, *pour que l'équation* (66) *soit compatible avec l'existence de l'effort à l'intérieur du milieu considéré, il faut que Φ soit une fonction de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, et l'on retombe sur le cas envisagé au numéro précédent.*

Les indications précédentes doivent être jointes à celles que M. Poincaré donne à propos du paradoxe signalé à la page 77 de ses *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité;* elles en forment, il nous semble, un complément utile. Lorsque nous nous occuperons plus loin de la déformation infiniment petite, elles présenteront un certain intérêt.

27. *Retour au corps homogène considéré aux* n°s 22 *et* 23. *Cas où $\delta\mathfrak{T}_e$ est différentielle exacte; stabilité de l'équilibre de ce corps. Équilibre de bifurcation et équilibre limite de M. Poincaré.*

En raison du lien qui existe entre l'*équilibre en un point* considéré au n° 24 et l'équilibre du corps homogène considéré aux n°s 22 et 23, nous allons revenir un instant sur ce dernier. Nous définirons sa position au moyen des trois paramètres a_{10}, a_{20}, a_{30} qui figurent dans les équations (5), au moyen des auxiliaires λ, μ, ν du n° 6, et au moyen des six composantes de la déformation $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Plaçons-nous dans le cas où $\delta\mathfrak{T}_e$ est la différentielle exacte d'une fonction que nous désignerons par $\mathfrak{T}_e$; l'équilibre aura lieu lorsque toutes les dérivées de la fonction

$$W - \mathfrak{T}_e$$

seront nulles.

(¹) G. Cellérier, *Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques*, p. 37 (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXI, p. 26-43; 1893).

Si cette fonction renferme, d'une façon distincte, les différents paramètres dont dépend la position du corps, et si elle est minimum l'équilibre sera stable, ainsi que l'a remarqué M. Duhem ([1]).

Si les différents paramètres dont dépend la position du corps ne figurent pas tous dans $W - \mathfrak{T}_e$, on aura à répéter ici la remarque faite par M. Appell ([2]); supposons, par exemple, que dans l'état naturel du corps considéré, c'est-à-dire dans l'état libre de toute déformation, les forces extérieures soient nulles; la fonction $W - \mathfrak{T}_e$ se réduit à W; si W est minimum pour l'état naturel, on ne peut pas affirmer que l'équilibre correspondant est stable; mais il est stable *si l'on n'a égard qu'à la déformation subie par le corps*.

Supposons maintenant que l'on fasse varier d'une façon continue les forces qui agissent sur le corps, et que ces forces dépendent, par exemple, d'un paramètre y; supposons que, pour toutes les valeurs de y, la fonction $\mathfrak{T}_e$ existe; nous nous trouverons dans des conditions identiques à celles envisagées par M. Poincaré, au début de son beau Mémoire *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta Mathematica*, t. VII, p. 259-380; 1885), et nous sommes conduits à introduire, dans le cas actuel, les notions d'*équilibre de bifurcation*, d'*équilibre limite* et de l'*échange des stabilités*.

A ces notions on doit, au point de vue de la question que nous envisageons, en adjoindre d'autres, parmi lesquelles la suivante : pour certaines valeurs réelles du paramètre y, les équations de l'équilibre pourront admettre un système de solutions infinies, et l'on conçoit qu'il puisse arriver que l'une de ces valeurs de y corresponde à la série linéaire de formes d'équilibre qui a pour point de départ l'état naturel donné. En d'autres termes, les valeurs remarquables de y, à l'égard de cette série linéaire de formes d'équilibre, doivent être choisies parmi *tous* les points critiques des fonctions de y définies par le système des équations d'équilibre.

Nous n'insisterons pas davantage sur les questions que nous venons de signaler et *qui ont leurs correspondantes bien évidentes dans l'étude des*

([1]) DUHEM, *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3e Partie, p. 264 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X; 1894). — *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, p. 103 et suiv. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I; 1895).

([2]) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 353.

équations aux dérivées partielles (63) *et* (64); nous espérons y revenir dans un prochain travail et préciser les indications auxquelles nous nous bornons pour le moment.

28. *Du choix de l'état naturel.*

Étant donné un corps élastique, nous avons admis l'existence d'un *état naturel,* c'est-à-dire d'un état considéré comme libre de toute déformation, dans lequel le corps est homogène, et tel que, pour toute déformation, l'énergie de déformation relative à un point P du corps définit, lorsque P varie, une fonction formée uniquement avec les six expressions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

On remarquera que nous admettons, dans l'état naturel, une sorte d'homogénéité par rapport aux axes coordonnés, et que, après une déformation quelconque, cette sorte d'homogénéité n'existe plus par rapport aux mêmes axes, mais subsiste, en quelque sorte, par rapport aux trois familles de surfaces dans lesquelles se sont transformées les trois familles orthogonales de plans du système primitif de coordonnées.

Nous ne développerons pas actuellement cette indication qui nous conduirait à une extension évidente de notre façon de définir la déformation, et nous nous bornerons aux remarques suivantes.

L'état naturel le plus simple que l'on puisse concevoir est celui dans lequel les efforts et les forces extérieures seraient nuls; si nous admettons son existence, il résulte des relations (59) que les six dérivées partielles du premier ordre de W, par rapport à ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, doivent s'annuler pour des valeurs nulles de ces lettres. Si la fonction W est, comme nous le supposerons dans la suite, développable suivant les puissances entières positives de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, on aura donc

$$W = W_2 + W_3 + \ldots, \tag{67}$$

W_2 désignant un polynome homogène du second degré, W_3 un polynome homogène du troisième degré, ..., et le terme constant étant supposé égal à zéro, comme cela est permis.

Si l'on veut que, pour l'état naturel, l'équilibre en un point soit stable, *au point de vue de la déformation* (n° 27), il suffit que W soit positif pour toutes les valeurs infiniment petites des six composantes de la déformation, et cette condition s'exprime immédiatement à la façon habituelle au moyen de la forme quadratique W_2.

On peut aussi, avec M. Poincaré, ne pas faire l'hypothèse précédente sur l'état naturel; si l'on suppose W développable suivant les puissances entières positives de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, on aura alors le développement suivant :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \tag{68}$$

qui renferme, en plus que le développement (67), le terme W_1 linéaire par rapport à ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

Les coefficients de W_1 et de W_2 sont les *coefficients d'élasticité ;* ils sont généralement au nombre de vingt-sept ; dans l'hypothèse de l'état naturel considéré en premier lieu, ils seront généralement au nombre de vingt et un.

29. *Isotropie. Hétérotropie.*

Un corps homogène est *isotrope* lorsqu'en un point quelconque il est impossible de distinguer par une propriété physique quelconque une direction d'une autre. Dans le cas contraire, on dit qu'il est *hétérotrope.*

Nous voyons donc que, dans un corps homogène isotrope, la fonction W doit être simplement une fonction des racines de l'équation (14) du n° 6, ou encore une fonction des trois invariants du n° 7, savoir :

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2), \\
4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2.
\end{gathered}$$

Les termes W_1 et W_2 contiennent donc respectivement une et deux constantes seulement, et l'on peut écrire

$$W_1 = -2\nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \tag{69}$$

$$2W_2 = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \mu(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4\varepsilon_2\varepsilon_3 - 4\varepsilon_3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2), \tag{70}$$

λ, μ, ν désignant trois constantes et la notation adoptée étant celle de Lamé et de M. H. Poincaré.

Si l'on se place dans le cas de l'équilibre naturel considéré au commencement du numéro précédent, on a $\nu = 0$ et, pour cet état naturel, on est assuré que l'équilibre en un point est stable lorsque les quantités μ et $3\lambda + 2\mu$ sont positives.

Nous n'examinerons pas ici les différentes réductions qui se produisent dans le nombre des coefficients d'élasticité suivant la nature de l'hétérotropie du corps.

30. *Équations relatives à la déformation infiniment petite.*

Supposons, pour fixer les idées, que dans les équations (63) et (64) du n° 25, X, Y, Z, F, G, H soient des fonctions données de x, y, z, x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire de x, y, z, u, v, w, et désignons par $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ ce que deviennent ces fonctions, supposées continues, lorsqu'on y remplace x_1, y_1, z_1 par x, y, z, c'est-à-dire u, v, w tous trois par zéro.

Dans l'état naturel, les fonctions X, Y, Z sont nulles, d'après les équations (63), et les fonctions F, G, H se réduisent à des fonctions F_0, G_0, H_0 qui sont nulles, si l'on adopte la première définition de l'état naturel donnée au n° 28.

Écrivons alors les fonctions X, Y, Z, F, G, H sous la forme suivante :

$$X = tX', \qquad Y = tY', \qquad Z = tZ',$$
$$F = F_0 + tF', \qquad G = G_0 + tG', \qquad H = H_0 + tH',$$

t désignant une constante et X′, Y′, Z′, F′, G′, H′ des fonctions de x, y, z, u, v, w.

Les fonctions u, v, w dont nous admettons l'existence et qui vérifient les équations (63), (64) seront des fonctions de x, y, z et de t ; ces fonctions devront s'annuler pour $t = 0$. Supposons qu'on se propose de les développer suivant les puissances entières positives de t (¹), en écrivant, avec la notation du n° 8,

$$\mathrm{u} = u + u_1 + u_2 + \ldots,$$
$$\mathrm{v} = v + v_1 + v_2 + \ldots,$$
$$\mathrm{w} = w + w_1 + w_2 + \ldots.$$

En admettant que ces développements soient possibles, soient absolument et uniformément convergents par rapport à x, y, z, et que X, Y, Z, F, G, H puissent se développer suivant les puissances de u, v, w en séries absolument et uniformément convergentes, il est facile d'écrire la suite d'équations auxquelles on est conduit dans l'hypothèse où W est aussi développable suivant les puissances entières et positives de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

(¹) On remarquera l'analogie des indications actuelles et de celles que l'on trouve p. 2 et suiv. du t. IV des *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, de M. Darboux, ainsi que p. 65 et suiv. du Mémoire de M. Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII ; 1894).

Le développement de W, suivant les puissances de t, est

$$W = W_1(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3) + \left[W_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial w_1}{\partial z}, \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} W_1(\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz}, 2\Pi_{yz}, 2\Pi_{zx}, 2\Pi_{xy}) + W_2(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3) \right] t + \ldots,$$

en posant, avec M. Poincaré (¹),

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta},$$

et en désignant par e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 les dilatations linéaires et les glissements relatifs à la déformation infiniment petite définis par les formules (18) du n° 9.

Si nous avons égard uniquement au terme indépendant de t et à la première puissance de t, et si nous posons

$$W' = W_1(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)$$
$$+ \tfrac{1}{2} W_1(\Pi_{xx}, \Pi_{yy}, \Pi_{zz}, 2\Pi_{yz}, 2\Pi_{zx}, 2\Pi_{xy}) + W_2(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3),$$

nous obtenons les équations (²)

$$(71)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}\right) + \rho \mathfrak{X} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}\right) + \rho \mathfrak{Y} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}\right) + \rho \mathfrak{Z} = 0. \end{cases}$$

$$(72)\quad \begin{cases} \mathfrak{F} = l \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + m \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + n \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}, \\[2ex] \mathfrak{G} = l \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + m \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + n \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}, \\[2ex] \mathfrak{H} = l \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} + m \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} + n \dfrac{\partial W'}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}, \end{cases}$$

(¹) H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 46.

(²) Comparer H. POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 47, 53, 58.

que l'on peut encore écrire

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}\right)+\rho \mathfrak{X}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}\right)+\rho \mathfrak{Y}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}\right)+\rho \mathfrak{Z}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{F}-F_0=l\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}+m\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}+n\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}},\\ &\mathfrak{G}-G_0=l\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}+m\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}+n\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}},\\ &\mathfrak{H}-H_0=l\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}+m\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}+n\frac{\partial W''}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}},\end{aligned}\right.$$

en posant

$$W''=\tfrac{1}{2}W_1(\Pi_{xx},\Pi_{yy},\Pi_{zz},2\Pi_{yz},2\Pi_{zx},2\Pi_{xy})+W_2(e_1,e_2,e_3,g_1,g_2,g_3).$$

Nous retrouvons, on le voit, les équations données par M. Poincaré dans ses *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité,* et, d'après ce que nous avons dit au n° 26, nous pouvons résumer les équations (71) et (72) dans la suivante

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \delta W'\,dx\,dy\,dz-\iiint \rho(\mathfrak{X}\,\delta u+\mathfrak{Y}\,\delta v+\mathfrak{Z}\,\delta w)\,dx\,dy\,dz\\ &\qquad -\iint(\mathfrak{F}\,\delta u+\mathfrak{G}\,\delta v+\mathfrak{H}\,\delta w)\,d\sigma=0,\end{aligned}\right.$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw.

31. *Cas où dans l'état naturel les efforts et les forces extérieures sont nuls. Théorème de Kirchhoff.*

Considérons, en particulier, le cas où l'état naturel est celui considéré en premier lieu au n° 28.

Les N_i, T_i, ainsi que les P_i, U_i s'annulent avec t; les termes $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{T}_i$ des

développements de N_i, T_i qui renferment t en facteur à la première puissance sont égaux aux termes analogues $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{V}_i$ dans les fonctions correspondantes P_i, U_i, et l'on a

$$(76)\quad \begin{cases} \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{P}_1 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial e_1}, & \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{V}_1 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial g_1}, \\ \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{P}_2 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial e_2}, & \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{V}_2 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial g_2}, \\ \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{P}_3 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial e_3}, & \mathfrak{T}_3 = \mathfrak{V}_3 = \dfrac{\partial W_2(e_i, g_i)}{\partial g_3}, \end{cases}$$

en désignant par $W_2(e_i, g_i)$ la forme quadratique $W_2(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)$ obtenue en remplaçant dans la forme quadratique W_2, qui figure dans l'équation (67) du n° 28, les lettres ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 par les lettres e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3.

Les équations (71) deviennent

$$(77)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial z} + \rho \mathfrak{X} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial z} + \rho \mathfrak{Y} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}_3}{\partial z} + \rho \mathfrak{Z} = 0, \end{cases}$$

et les équations à la limite (72),

$$(78)\quad \begin{cases} \mathfrak{F} = l\mathfrak{N}_1 + m\mathfrak{T}_3 + n\mathfrak{T}_2, \\ \mathfrak{G} = l\mathfrak{T}_3 + m\mathfrak{N}_2 + n\mathfrak{T}_1, \\ \mathfrak{H} = l\mathfrak{T}_2 + m\mathfrak{T}_1 + n\mathfrak{N}_3. \end{cases}$$

Ces équations peuvent se résumer dans la suivante

$$\iiint \delta W_2(e_i, g_i)\,dx\,dy\,dz - \iiint \rho(\mathfrak{X}\,\delta u + \mathfrak{Y}\,\delta v + \mathfrak{Z}\,\delta w)\,dx\,dy\,dz - \iint (\mathfrak{F}\,\delta u + \mathfrak{G}\,\delta v + \mathfrak{H}\,\delta w)\,d\sigma = 0,$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels δu, δv, δw.

Lorsque l'équilibre en un point est stable et que la forme quadratique $W_2(e_i, g_i)$ est définie positive, on peut démontrer avec Kirchhoff que, si les équations (77) et (78) admettent deux solutions différentes, les dilata-

tions linéaires et les glissements sont les mêmes dans ces deux solutions. Ceci revient à dire en effet que, si dans les équations (77), (78) les fonctions $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont nulles, les dilatations linéaires et les glissements seront nuls pour toute solution. Or, si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sont nulles, les équations (77) entraînent la relation suivante

$$\iiint\left[u\left(\frac{\partial\mathfrak{N}_1}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{C}_3}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{C}_2}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial\mathfrak{C}_3}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{N}_2}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+w\left(\frac{\partial\mathfrak{C}_2}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}_3}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz=0,$$

qui, en vertu des relations (78), où les premiers membres sont supposés nuls, donne

$$\iiint(e_1\mathfrak{N}_1+e_2\mathfrak{N}_2+e_3\mathfrak{N}_3+g_1\mathfrak{C}_1+g_2\mathfrak{C}_2+g_3\mathfrak{C}_3)\,dx\,dy\,dz=0,$$

c'est-à-dire

$$\iiint W_2(e_i,g_i)\,dx\,dy\,dz=0.$$

La forme W_2 étant définie positive, les six expressions e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 doivent donc être nulles.

32. *Équations relatives à la déformation infiniment petite, lorsque le corps est isotrope.*

Si le corps est isotrope, il suffit d'adopter pour W_1 et W_2 les expressions données par les formules (69) et (70); il vient alors

$$2W'=-4\nu(e_1+e_2+e_3)-2\nu(\Pi_{xx}+\Pi_{yy}+\Pi_{zz})+(\lambda+2\mu)(e_1+e_2+e_3)^2$$
$$+\mu(g_1^2+g_2^2+g_3^2-4e_2e_3-4e_3e_1-4e_1e_2),$$

résultat identique à celui de M. Poincaré ([1]), savoir

$$W'=-2\nu(e_1+e_2+e_3)+\lambda\frac{\theta^2}{2}+\mu H'-\nu(\Pi_{xx}+\Pi_{yy}+\Pi_{zz}),$$

où l'on pose

$$H'=e_1^2+e_2^2+e_3^2+\frac{g_1^2+g_2^2+g_3^2}{2},$$

([1]) H. Poincaré, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 56 et suiv.

et où l'on désigne par θ la dilatation cubique

(79) $$\theta = e_1 + e_2 + e_3.$$

Si les efforts et les forces extérieures sont nuls dans l'état d'équilibre naturel, on a

$$W_2(e_i, g_i) = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)(e_1 + e_2 + e_3)^2 + \frac{\mu}{2}(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 - 4e_2e_3 - 4e_3e_1 - 4e_1e_2),$$

$$\mathfrak{N}_i = \lambda\theta + 2\mu e_i, \qquad \mathfrak{T}_i = \mu g_i,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{N}_1 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \mathfrak{T}_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\mathfrak{N}_2 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mathfrak{T}_2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\mathfrak{N}_3 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \mathfrak{T}_3 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Les équations relatives à l'équilibre intérieur sont, par suite,

(80) $$\begin{cases} (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \rho\mathfrak{X} = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v + \rho\mathfrak{Y} = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w + \rho\mathfrak{Z} = 0, \end{cases}$$

et les équations à la surface

(81) $$\begin{cases} \mathfrak{F} = l\left(\lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + m\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + n\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \mathfrak{G} = l\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + m\left(\lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + n\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{H} = l\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + m\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + n\left(\lambda\theta + 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z}\right). \end{cases}$$

CHAPITRE IV.

LES ÉQUATIONS DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES.

I. — Notions sur les coordonnées curvilignes.

33. *Déplacements à trois variables indépendantes; étude des rotations.*

M. Darboux, dans ses *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, a fait une étude complète des systèmes mobiles dont les différentes positions dépendent de deux paramètres distincts, et a indiqué (¹) que les résultats de cette étude pouvaient s'étendre sans difficulté au cas où les déplacements des systèmes considérés dépendent de trois paramètres. Nous allons donner sommairement les résultats que l'on obtient par cette extension, dans l'exposition suivante, qui est *calquée* sur celle que M. Darboux a consacrée aux déplacements à deux paramètres.

Pour étudier d'abord les propriétés des rotations, nous commencerons par supposer que le système mobile a un point fixe qui sera l'origine à la fois des axes fixes et des axes mobiles. Alors les neuf cosinus qui déterminent la position des axes mobiles sont des fonctions de trois variables indépendantes ρ_1, ρ_2, ρ_3. A partir de chacune de ses positions, le système mobile peut prendre une infinité de mouvements qui correspondent aux différents systèmes de deux relations que l'on peut établir entre ρ_1, ρ_2, ρ_3. Nous introduirons trois systèmes différents de rotations. Les unes, que nous désignerons par p_1, q_1, r_1, se rapportent au déplacement dans lequel ρ_1 varie seule. Elles donnent naissance au système

$$(82)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_1} = \beta r_1 - \gamma q_1, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial\rho_1} = \gamma p_1 - \alpha r_1, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_1} = \alpha q_1 - \beta p_1,$$

qui devra admettre, comme solutions particulières, les trois cosinus de chaque groupe. Les secondes, que nous désignerons par p_2, q_2, r_2, sont relatives au cas où ρ_2 varie seule. Elles donnent également naissance au

---

(¹) G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 67.

système

$$(83)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_2} = \beta r_2 - \gamma q_2, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial\rho_2} = \gamma p_2 - \alpha r_2, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_2} = \alpha q_2 - \beta p_2,$$

tout semblable au premier. Enfin, les dernières p_3, q_3, r_3 sont relatives au cas où ρ_3 varie seule, et donnent naissance au système

$$(84)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\rho_3} = \beta r_3 - \gamma q_3, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial\rho_3} = \gamma p_3 - \alpha r_3, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\rho_3} = \alpha q_3 - \beta p_3.$$

Il résulte immédiatement de là que si l'on considère un déplacement du système dans lequel ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des fonctions données de t, on aura

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta R - \gamma Q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \gamma P - \alpha R, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha Q - \beta P,$$

P, Q, R ayant les valeurs

$$P = p_1\frac{d\rho_1}{dt} + p_2\frac{d\rho_2}{dt} + p_3\frac{d\rho_3}{dt}, \qquad Q = q_1\frac{d\rho_1}{dt} + q_2\frac{d\rho_2}{dt} + q_3\frac{d\rho_3}{dt}, \qquad R = r_1\frac{d\rho_1}{dt} + r_2\frac{d\rho_2}{dt} + r_3\frac{d\rho_3}{dt},$$

et, par conséquent, ces trois quantités P, Q, R seront les rotations relatives au mouvement considéré. Les projections sur les axes mobiles du chemin ou de l'arc infiniment petit décrit, dans ce mouvement, par un point dont les coordonnées relatives à ces axes seraient x, y, z, auront pour valeurs

$$\begin{aligned}
&dx + (q_1\,d\rho_1 + q_2\,d\rho_2 + q_3\,d\rho_3)z - (r_1\,d\rho_1 + r_2\,d\rho_2 + r_3\,d\rho_3)y,\\
&dy + (r_1\,d\rho_1 + r_2\,d\rho_2 + r_3\,d\rho_3)x - (p_1\,d\rho_1 + p_2\,d\rho_2 + p_3\,d\rho_3)z,\\
&dz + (p_1\,d\rho_1 + p_2\,d\rho_2 + p_3\,d\rho_3)y - (q_1\,d\rho_1 + q_2\,d\rho_2 + q_3\,d\rho_3)x.
\end{aligned}$$

Égalons les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}$ que l'on peut obtenir en différentiant les deux premières équations des systèmes (82) et (83). Nous aurons, après avoir remplacé les dérivées de β, γ par leurs valeurs tirées de ces deux systèmes,

$$\beta\left(\frac{\partial r_1}{\partial\rho_2} - \frac{\partial r_2}{\partial\rho_1} - p_1 q_2 + q_1 p_2\right) = \gamma\left(\frac{\partial q_1}{\partial\rho_2} - \frac{\partial q_2}{\partial\rho_1} - r_1 p_2 + p_1 r_2\right).$$

Comme cette relation doit avoir lieu quand on remplace β, γ soit par b, c, soit par b', c', soit par b'', c'', en désignant par a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''

les cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes, il faudra que les coefficients de β et de γ soient nuls séparément. Nous avons ainsi deux équations. En égalant de même les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \beta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}$, $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}$, déduites des systèmes (82) et (83), on obtiendra une seule équation nouvelle, et l'on sera conduit au système

$$(85)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \rho_1} &= q_1 r_2 - r_1 q_2, \\ \frac{\partial q_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial q_2}{\partial \rho_1} &= r_1 p_2 - p_1 r_2, \\ \frac{\partial r_1}{\partial \rho_2} - \frac{\partial r_2}{\partial \rho_1} &= p_1 q_2 - q_1 p_2, \end{aligned}\right.$$

auquel s'ajoutent évidemment les deux autres systèmes

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial \rho_3} - \frac{\partial p_3}{\partial \rho_2} &= q_2 r_3 - r_2 q_3, \\ \frac{\partial q_2}{\partial \rho_3} - \frac{\partial q_3}{\partial \rho_2} &= r_2 p_3 - p_2 r_3, \\ \frac{\partial r_2}{\partial \rho_3} - \frac{\partial r_3}{\partial \rho_2} &= p_2 q_3 - q_2 p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(87)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_3}{\partial \rho_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_3} &= q_3 r_1 - r_3 q_1, \\ \frac{\partial q_3}{\partial \rho_1} - \frac{\partial q_1}{\partial \rho_3} &= r_3 p_1 - p_3 r_1, \\ \frac{\partial r_3}{\partial \rho_1} - \frac{\partial r_1}{\partial \rho_3} &= p_3 q_1 - q_3 p_1. \end{aligned}\right.$$

Les théorèmes généraux relatifs aux équations aux dérivées partielles montrent que, réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra neuf quantités p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3 satisfaisant aux équations (85), (86), (87), il existera un mouvement dans lequel ces neuf quantités seront les rotations. On voit d'ailleurs, comme dans le cas d'une seule variable ou de deux variables (¹), que toutes les solutions des équations (82), (83), (84) que l'on peut obtenir se déduisent de l'une d'elles par un simple changement de coordonnées. On a toujours le même déplacement, mais il est rapporté à des axes différents.

(¹) G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 7, 52.

Pour intégrer les systèmes (82), (83), (84), comme on ne doit considérer, dans la question qui nous occupe, que les solutions pour lesquelles on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

on pourra exprimer α, β, γ en fonction des variables λ_1, λ_2 par les formules

$$(88)\qquad \alpha=\frac{1-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad \beta=i\frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad \gamma=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Si l'on substitue les valeurs (88) de α, β, γ dans les équations (82), (83) et (84), on trouve que λ_1 et λ_2 doivent, l'une et l'autre, satisfaire aux trois équations

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1}=-ir_1\sigma+\frac{q_1-ip_1}{2}+\frac{q_1+ip_1}{2}\sigma^2,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_2}=-ir_2\sigma+\frac{q_2-ip_2}{2}+\frac{q_2+ip_2}{2}\sigma^2,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_3}=-ir_3\sigma+\frac{q_3-ip_3}{2}+\frac{q_3+ip_3}{2}\sigma^2.$$

On pourrait faire, sur l'intégration simultanée de ces trois équations, une étude entièrement analogue à celle que M. Darboux a donnée pour un système de deux équations de cette forme. Nous n'insisterons pas sur ce point.

34. *Déplacements à trois variables, dans le cas où le système mobile n'a pas de point fixe.*

Après avoir considéré le cas où le système mobile a un point fixe, nous devons examiner l'hypothèse où le trièdre formé par les axes rectangulaires mobiles se meut d'une manière quelconque dans l'espace; alors, il faudra joindre, aux neuf rotations, neuf quantités nouvelles. Nous désignerons par ξ_1, η_1, ζ_1 les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles relativement à ces axes, quand ρ_1 varie seule et joue le rôle du temps, par ξ_2, η_2, ζ_2 les mêmes composantes quand ρ_2 varie seule, et par ξ_3, η_3, ζ_3 les mêmes composantes quand ρ_3 varie seule.

Si l'on désigne par X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées de l'origine des axes mobiles par rapport aux axes fixes, on aura

$$(89)\qquad \frac{\partial X_0}{\partial\rho_1}=a\xi_1+b\eta_1+c\zeta_1,\qquad \frac{\partial X_0}{\partial\rho_2}=a\xi_2+b\eta_2+c\zeta_2,\qquad \frac{\partial X_0}{\partial\rho_3}=a\xi_3+b\eta_3+c\zeta_3,$$

et les équations analogues en Y_0, Z_0. Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 X_0}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}$ que l'on peut déduire de ces formules. Après avoir remplacé les dérivées des cosinus par leurs valeurs, nous obtiendrons une équation qui, devant avoir lieu quand on remplacera a, b, c par les autres systèmes a', b', c'; a'', b'', c'', entraînera les trois suivantes :

$$(90)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\rho_2} - \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\rho_1} = q_1\zeta_2 - q_2\zeta_1 - r_1\eta_2 + r_2\eta_1, \\[2ex] \dfrac{\partial\eta_1}{\partial\rho_2} - \dfrac{\partial\eta_2}{\partial\rho_1} = r_1\xi_2 - r_2\xi_1 - p_1\zeta_2 + p_2\zeta_1, \\[2ex] \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_2} - \dfrac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_1} = p_1\eta_2 - p_2\eta_1 - q_1\xi_2 + q_2\xi_1. \end{cases}$$

Si l'on égale de même les valeurs de $\frac{\partial^2 X_0}{\partial\rho_2\,\partial\rho_3}$, et celles de $\frac{\partial^2 X_0}{\partial\rho_3\,\partial\rho_1}$, on obtient

$$(91)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\rho_3} - \dfrac{\partial\xi_3}{\partial\rho_2} = q_2\zeta_3 - q_3\zeta_2 - r_2\eta_3 + r_3\eta_2, \\[2ex] \dfrac{\partial\eta_2}{\partial\rho_3} - \dfrac{\partial\eta_3}{\partial\rho_2} = r_2\xi_3 - r_3\xi_2 - p_2\zeta_3 + p_3\zeta_2, \\[2ex] \dfrac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_3} - \dfrac{\partial\zeta_3}{\partial\rho_2} = p_2\eta_3 - p_3\eta_2 - q_2\xi_3 + q_3\xi_2. \end{cases}$$

$$(92)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_3}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\rho_3} = q_3\zeta_1 - q_1\zeta_3 - r_3\eta_1 + r_1\eta_3, \\[2ex] \dfrac{\partial\eta_3}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial\eta_1}{\partial\rho_3} = r_3\xi_1 - r_1\xi_3 - p_3\zeta_1 + p_1\zeta_3, \\[2ex] \dfrac{\partial\zeta_3}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_3} = p_3\eta_1 - p_1\eta_3 - q_3\xi_1 + q_1\xi_3. \end{cases}$$

Réciproquement, lorsque les dix-huit quantités ξ_1, η_1, ζ_1, p_1, q_1, r_1, ... satisferont aux équations (90), (91), (92), en même temps qu'aux équations (85), (86), (87), il existera un déplacement dans lequel elles seront les rotations et les translations; car nous savons déjà qu'on pourra déterminer les neuf cosinus; et, de plus, les équations telles que (89), qui seront compatibles en vertu des équations (90), (91), (92), nous fourniront par des quadratures les coordonnées de l'origine des axes mobiles. Il est inutile de répéter ici que tous les mouvements obtenus se réduisent au fond à un seul, observé par rapport à des axes différents.

Il est évident que, si, au lieu de considérer toutes les positions du sys-

tème mobile qui correspondent aux différentes valeurs de ρ_1, de ρ_2 et de ρ_3, on suppose que ρ_1, ρ_2 et ρ_3 soient des fonctions d'un seul paramètre t, les rotations et translations relatives à ce mouvement seront respectivement

$$p_1\frac{d\rho_1}{dt}+p_2\frac{d\rho_2}{dt}+p_3\frac{d\rho_3}{dt},\qquad q_1\frac{d\rho_1}{dt}+q_2\frac{d\rho_2}{dt}+q_3\frac{d\rho_3}{dt},\qquad r_1\frac{d\rho_1}{dt}+r_2\frac{d\rho_2}{dt}+r_3\frac{d\rho_3}{dt},$$
$$\xi_1\frac{d\rho_1}{dt}+\xi_2\frac{d\rho_2}{dt}+\xi_3\frac{d\rho_3}{dt},\qquad \eta_1\frac{d\rho_1}{dt}+\eta_2\frac{d\rho_2}{dt}+\eta_3\frac{d\rho_3}{dt},\qquad \zeta_1\frac{d\rho_1}{dt}+\zeta_2\frac{d\rho_2}{dt}+\zeta_3\frac{d\rho_3}{dt},$$

et les projections sur les axes mobiles de l'élément de courbe décrit par un point quelconque, dont les coordonnées sont x, y, z par rapport aux axes mobiles, seront

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned}
&dx+\xi_1\,d\rho_1+\xi_2\,d\rho_2+\xi_3\,d\rho_3+(q_1\,d\rho_1+q_2\,d\rho_2+q_3\,d\rho_3)\,z-(r_1\,d\rho_1+r_2\,d\rho_2+r_3\,d\rho_3)\,y,\\
&dy+\eta_1\,d\rho_1+\eta_2\,d\rho_2+\eta_3\,d\rho_3+(r_1\,d\rho_1+r_2\,d\rho_2+r_3\,d\rho_3)\,x-(p_1\,d\rho_1+p_2\,d\rho_2+p_3\,d\rho_3)\,z,\\
&dz+\zeta_1\,d\rho_1+\zeta_2\,d\rho_2+\zeta_3\,d\rho_3+(p_1\,d\rho_1+p_2\,d\rho_2+p_3\,d\rho_3)\,y-(q_1\,d\rho_1+q_2\,d\rho_2+q_3\,d\rho_3)\,x.
\end{aligned}\right.$$

En d'autres termes, si t est le temps, on aura les composantes de la vitesse par rapport aux axes mobiles, en divisant les trois expressions précédentes par dt. Cette remarque, qui dispense de beaucoup de calculs, permet de laisser de côté tout ce qui concerne les axes fixes.

35. *Coordonnées curvilignes de Lamé.*

Les coordonnées curvilignes que Gauss a employées d'une manière systématique dans l'étude des surfaces ont été étendues par Lamé à l'espace à trois dimensions.

Un point de l'espace est habituellement défini par ses trois coordonnées; mais on peut supposer que celles-ci aient été exprimées au moyen de trois variables indépendantes que nous appellerons ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Un système de coordonnées curvilignes peut être représenté géométriquement. Il suffit de considérer les trois familles de surfaces, lieux des points pour lesquels l'une ou l'autre des variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 demeure constante. Mais il importe de remarquer que le système de coordonnées n'est pas complètement défini si l'on donne seulement les trois familles de surfaces coordonnées. On pourra évidemment, sans changer ces surfaces, remplacer ρ_1, ρ_2, ρ_3 par d'autres variables qui seront respectivement des fonctions quelconques des premières. C'est une remarque dont on fait souvent usage et qui permet quelquefois de grandes simplifications.

Proposons-nous de trouver l'expression de l'arc d'une courbe quelconque tracée dans l'espace. Si les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de l'espace sont exprimées en fonction des trois variables ρ_1, ρ_2, ρ_3, cet arc se déterminera au moyen de la formule

$$(94)\qquad ds^2 = A\,d\rho_1^2 + B\,d\rho_2^2 + C\,d\rho_3^2 + 2D\,d\rho_2\,d\rho_3 + 2E\,d\rho_3\,d\rho_1 + 2F\,d\rho_1\,d\rho_2,$$

où l'on a

$$(95)\quad \begin{cases} A = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2, & D = \dfrac{\partial x}{\partial \rho_2}\dfrac{\partial x}{\partial \rho_3} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho_2}\dfrac{\partial y}{\partial \rho_3} + \dfrac{\partial z}{\partial \rho_2}\dfrac{\partial z}{\partial \rho_3}, \\ B = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2, & E = \dfrac{\partial x}{\partial \rho_3}\dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho_3}\dfrac{\partial y}{\partial \rho_1} + \dfrac{\partial z}{\partial \rho_3}\dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}, \\ C = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho_3}\right)^2, & F = \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial x}{\partial \rho_2} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial y}{\partial \rho_2} + \dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial z}{\partial \rho_2}. \end{cases}$$

Nous appellerons, pour abréger, ds l'élément linéaire. Nous mettrons aussi son carré sous la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & H_1^2\,d\rho_1^2 + H_2^2\,d\rho_2^2 + H_3^2\,d\rho_3^2 \\ & + 2H_2H_3\cos\alpha_1\,d\rho_2\,d\rho_3 + 2H_3H_1\cos\alpha_2\,d\rho_3\,d\rho_1 + 2H_1H_2\cos\alpha_3\,d\rho_1\,d\rho_2, \end{aligned}$$

en posant

$$H_1 = \sqrt{A},\quad H_2 = \sqrt{B},\quad H_3 = \sqrt{C},\quad \cos\alpha_1 = \frac{D}{\sqrt{B}\sqrt{C}},\quad \cos\alpha_2 = \frac{E}{\sqrt{C}\sqrt{A}},\quad \cos\alpha_3 = \frac{F}{\sqrt{A}\sqrt{B}}.$$

Les formules (95) montrent que $H_1\,d\rho_1$ est l'arc élémentaire de la courbe d'intersection des surfaces $\rho_2 = \text{const.}$, $\rho_3 = \text{const.}$; $H_2\,d\rho_2$ l'arc élémentaire de la courbe d'intersection de $\rho_3 = \text{const.}$, $\rho_1 = \text{const.}$; $H_3\,d\rho_3$ l'arc élémentaire de la courbe d'intersection de $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$; enfin α_1 est l'angle sous lequel se coupent les deux dernières courbes au point considéré, α_2 l'angle sous lequel se coupent la première et la troisième courbes, α_3 l'angle sous lequel se coupent la première et la deuxième courbe. On aura donc

$$D = 0,\qquad E = 0,\qquad F = 0$$

toutes les fois que l'on emploiera des coordonnées curvilignes rectangulaires.

Il résulte également des formules (95) que l'élément superficiel de la surface $\rho_3 = \text{const.}$ aura pour expression

$$H_1H_2\sin\alpha_3\,d\rho_1\,d\rho_2 = \sqrt{AB - F^2}\,d\rho_1\,d\rho_2,$$

et que ceux des surfaces $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$ seront

$$H_2 H_3 \sin\alpha_1\, d\rho_2\, d\rho_3 = \sqrt{BC - D^2}\, d\rho_2\, d\rho_3,$$
$$H_3 H_1 \sin\alpha_2\, d\rho_3\, d\rho_1 = \sqrt{CA - E^2}\, d\rho_3\, d\rho_1.$$

On verrait de même que le volume du parallélépipède infiniment petit ayant l'un de ses sommets en (ρ_1, ρ_2, ρ_3), dont les arêtes ont pour longueurs $H_1\, d\rho_1$, $H_2\, d\rho_2$, $H_3\, d\rho_3$, et dont les angles compris entre les arêtes sont α_1, α_2, α_3, est donné par l'expression

$$\begin{aligned} &H_1 H_2 H_3 \sqrt{1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + 2\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3}\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3 \\ &= \sqrt{ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF}\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3. \end{aligned}$$

Le développement de ces premières notions a permis à Lamé d'établir sa théorie des coordonnées curvilignes dans l'espace. Mais on peut aussi, comme nous allons le voir, faire l'étude du système triple de surfaces (ρ_1, ρ_2, ρ_3), en la rattachant directement aux notions données dans les n°s 33 et 34.

36. *Le trièdre mobile de référence.*

Considérons un système triple quelconque; on peut lier l'étude de ce système à celle du mouvement d'un trièdre mobile, en opérant de la manière suivante.

M désignant un point de l'espace, construisons un trièdre trirectangle (T) dont le sommet soit en M et dont les axes soient définis dès qu'on connaît la position de M. Sans indiquer, pour le moment, rien de plus précis relativement à la position de ces axes, nous allons montrer comment les propriétés du système triple, celles des surfaces et des courbes tracées dans l'espace qu'il définit, se déduisent de l'étude du mouvement du trièdre (T).

Si l'on conserve toutes les notations des n°s 33 et 34, à ce mouvement sont associées les équations

$$
(\mathrm{A})\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial p_2}{\partial \rho_1}=q_1 r_2-r_1 q_2, &&\frac{\partial \xi_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial \xi_2}{\partial \rho_1}=q_1\zeta_2-q_2\zeta_1-r_1\eta_2+r_2\eta_1,\\
&\frac{\partial q_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial q_2}{\partial \rho_1}=r_1 p_2-p_1 r_2, &&\frac{\partial \eta_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial \eta_2}{\partial \rho_1}=r_1\xi_2-r_2\xi_1-p_1\zeta_2+p_2\zeta_1,\\
&\frac{\partial r_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial r_2}{\partial \rho_1}=p_1 q_2-q_1 p_2, &&\frac{\partial \zeta_1}{\partial \rho_2}-\frac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_1}=p_1\eta_2-p_2\eta_1-q_1\xi_2+q_2\xi_1,\\
&\frac{\partial p_2}{\partial \rho_3}-\frac{\partial p_3}{\partial \rho_2}=q_2 r_3-r_2 q_3, &&\frac{\partial \xi_2}{\partial \rho_3}-\frac{\partial \xi_3}{\partial \rho_2}=q_2\zeta_3-q_3\zeta_2-r_2\eta_3+r_3\eta_2,\\
&\frac{\partial q_2}{\partial \rho_3}-\frac{\partial q_3}{\partial \rho_2}=r_2 p_3-p_2 r_3, &&\frac{\partial \eta_2}{\partial \rho_3}-\frac{\partial \eta_3}{\partial \rho_2}=r_2\xi_3-r_3\xi_2-p_2\zeta_3+p_3\zeta_2,\\
&\frac{\partial r_2}{\partial \rho_3}-\frac{\partial r_3}{\partial \rho_2}=p_2 q_3-q_2 p_3, &&\frac{\partial \zeta_2}{\partial \rho_3}-\frac{\partial \zeta_3}{\partial \rho_2}=p_2\eta_3-p_3\eta_2-q_2\xi_3+q_3\xi_2,\\
&\frac{\partial p_3}{\partial \rho_1}-\frac{\partial p_1}{\partial \rho_3}=q_3 r_1-r_3 q_1, &&\frac{\partial \xi_3}{\partial \rho_1}-\frac{\partial \xi_1}{\partial \rho_3}=q_3\zeta_1-q_1\zeta_3-r_3\eta_1+r_1\eta_3,\\
&\frac{\partial q_3}{\partial \rho_1}-\frac{\partial q_1}{\partial \rho_3}=r_3 p_1-p_3 r_1, &&\frac{\partial \eta_3}{\partial \rho_1}-\frac{\partial \eta_1}{\partial \rho_3}=r_3\xi_1-r_1\xi_3-p_3\zeta_1+p_1\zeta_3,\\
&\frac{\partial r_3}{\partial \rho_1}-\frac{\partial r_1}{\partial \rho_3}=p_3 q_1-q_3 p_1, &&\frac{\partial \zeta_3}{\partial \rho_1}-\frac{\partial \zeta_1}{\partial \rho_3}=p_3\eta_1-p_1\eta_3-q_3\xi_1+q_1\xi_3,
\end{aligned}\right.
$$

et il résulte évidemment des propositions données dans les n°s 33 et 34 qu'*à tout système de valeurs des quantités* $p_1, \ldots, \xi_1, \ldots,$ *satisfaisant à ces équations, correspondra un mouvement parfaitement déterminé, et, par conséquent, un seul système triple.*

Si un point rapporté au trièdre (T) a pour coordonnées x, y, z, on aura, en appliquant les formules (93) du n° 34 :

$$
(\mathrm{B})\left\{
\begin{aligned}
&dx+\xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2+\xi_3 d\rho_3+(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2+q_3 d\rho_3)z-(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2+r_3 d\rho_3)y,\\
&dy+\eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2+\eta_3 d\rho_3+(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2+r_3 d\rho_3)x-(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2+p_3 d\rho_3)z,\\
&dz+\zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2+\zeta_3 d\rho_3+(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2+p_3 d\rho_3)y-(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2+q_3 d\rho_3)x,
\end{aligned}\right.
$$

pour les projections de son déplacement sur les axes du trièdre mobile, quand ρ_1, ρ_2, ρ_3 prendront les accroissements $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$.

Considérons en particulier le système triple proposé qui est parcouru par l'origine du trièdre mobile ; ds désignant la différentielle de l'arc de courbe décrit par cette origine, et l, m, n les cosinus des angles que fait la tangente à cette courbe avec les trois axes rectangulaires du trièdre mobile, on aura

$$
l\,ds=\xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2+\xi_3 d\rho_3, \qquad m\,ds=\eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2+\eta_3 d\rho_3,
$$
$$
n\,ds=\zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2+\zeta_3 d\rho_3,
$$

Ces formules feront connaître l'élément linéaire de l'espace, dont le carré aura pour expression

$$ds^2 = (\xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3)^2 + (\eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3)^2 + (\zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3)^2.$$

En comparant cette expression à l'expression (94), on voit que

$$(96)\qquad \begin{cases} A = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, & D = \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3, \\ B = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2, & E = \xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1, \\ C = \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2, & F = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2. \end{cases}$$

Proposons-nous comme autre application d'établir la relation qui doit exister entre deux tangentes conjuguées, sur l'une des surfaces du système triple, la surface $\rho_3 =$ const. par exemple. Si le point M de la surface décrit une courbe, le plan tangent en M à cette surface enveloppe une surface développable qu'il touche suivant la conjuguée de la tangente à la courbe décrite par le point M.

L'équation du plan tangent au point M rapporté au trièdre mobile est

$$\begin{vmatrix} x & \xi_1 & \xi_2 \\ y & \eta_1 & \eta_2 \\ z & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par la lettre δ les différentielles relatives à un déplacement suivant la direction conjuguée; écrivons que les trois expressions

$$\xi_1\,\delta\rho_1 + \xi_2\,\delta\rho_2, \quad \eta_1\,\delta\rho_1 + \eta_2\,\delta\rho_2, \quad \zeta_1\,\delta\rho_1 + \zeta_2\,\delta\rho_2$$

sont les coordonnées d'un point dont le déplacement, déterminé par les formules (B), est dirigé dans le plan tangent; il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_1} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial\rho_1} + r_1\xi_1 - p_1\zeta_1 & \eta_1 & \eta_2 \\ \frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_1} + p_1\eta_1 - q_1\xi_1 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1\,\delta\rho_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi_2}{\partial\rho_2} + q_2\zeta_2 - r_2\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{\partial\eta_2}{\partial\rho_2} + r_2\xi_2 - p_2\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \frac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_2} + p_2\eta_2 - q_2\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_2\,\delta\rho_2$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi_2}{\partial\rho_1} + q_1\zeta_2 - r_1\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{\partial\eta_2}{\partial\rho_1} + r_1\xi_2 - p_1\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \frac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_1} + p_1\eta_2 - q_1\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1\,\delta\rho_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_2} + q_2\zeta_1 - r_2\eta_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial\rho_2} + r_2\xi_1 - p_2\zeta_1 & \eta_1 & \eta_2 \\ \frac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_2} + p_2\eta_1 - q_2\xi_1 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_2\,\delta\rho_1 = 0.$$

Cette relation est, comme il fallait s'y attendre, parfaitement symétrique par rapport aux différentielles d, δ, car les coefficients de $d\rho_1\,\delta\rho_2$ et de $d\rho_2\,\delta\rho_1$ sont égaux en vertu des formules (A).

Si l'on suppose que les deux directions conjuguées coïncident, il faudra remplacer partout δ par d, et l'on aura l'équation différentielle des lignes asymptotiques sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\rho_1} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{\partial\eta_1}{\partial\rho_1} + r_1\xi_1 - p_1\zeta_1 & \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_1} + p_1\eta_1 - q_1\xi_1 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1^2$$

$$+ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\rho_2} + q_2\zeta_1 - r_2\eta_1 + \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\rho_1} + q_1\zeta_2 - r_1\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{\partial\eta_1}{\partial\rho_2} + r_2\xi_1 - p_2\zeta_1 + \dfrac{\partial\eta_2}{\partial\rho_1} + r_1\xi_2 - p_1\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\rho_2} + p_2\eta_1 - q_2\xi_1 + \dfrac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_1} + p_1\eta_2 - q_1\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_1\,d\rho_2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_2}{\partial\rho_2} + q_2\zeta_2 - r_2\eta_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ \dfrac{\partial\eta_2}{\partial\rho_2} + r_2\xi_2 - p_2\zeta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \dfrac{\partial\zeta_2}{\partial\rho_2} + p_2\eta_2 - q_2\xi_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} d\rho_2^2 = 0.$$

Cherchons maintenant l'équation différentielle des lignes de courbure. Pour cela déterminons les déplacements du trièdre mobile pour lesquels la normale à la surface $\rho_3 = \text{const.}$ engendre une surface développable.

Pour qu'il en soit ainsi, il faudra qu'il existe sur cette normale un point variable dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles soient

$$\frac{R(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)}{N}, \quad \frac{R(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)}{N}, \quad \frac{R(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)}{N}$$

avec

$$N = \sqrt{(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)^2 + (\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)^2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2}$$

et décrivant, dans le mouvement considéré, une courbe constamment tangente à cette normale. Or, les projections du déplacement de ce point, quand ρ_1 et ρ_2 prennent les accroissements $d\rho_1$, $d\rho_2$, sont, d'après les formules (B),

$$d\frac{R(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)}{N} + \xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + (q_1\,d\rho_1 + q_2\,d\rho_2)\frac{R(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)}{N}$$
$$- (r_1\,d\rho_1 + r_2\,d\rho_2)\frac{R(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)}{N},$$

....

Pour que la courbe décrite soit tangente à la normale, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)\,d\rho_1+\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)\,d\rho_2\\&\quad+\frac{N}{R}(\xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2)+(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)-(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)\end{aligned}\right\}}{\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1}$$

$$=\frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)\,d\rho_1+\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)\,d\rho_2\\&\quad+\frac{N}{R}(\eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2)+(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)-(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\end{aligned}\right\}}{\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1}$$

$$=\frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\,d\rho_1+\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\,d\rho_2\\&\quad+\frac{N}{R}(\zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2)+(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)-(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)\end{aligned}\right\}}{\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2}.$$

Ces deux équations font connaître à la fois $\frac{d\rho_2}{d\rho_1}$ et R; cette dernière quantité est le rayon de courbure principal correspondant à la ligne de courbure considérée.

Si l'on élimine R et si l'on pose

$$a_3=\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1,\qquad b_3=\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1,\qquad c_3=\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1,$$

on obtient l'équation différentielle suivante

$$\begin{vmatrix} a_3 & \xi_1 d\rho_1+\xi_2 d\rho_2 & \frac{\partial a_3}{\partial\rho_1}d\rho_1+\frac{\partial a_3}{\partial\rho_2}d\rho_2+(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)\,c_3-(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)\,b_3\\ b_3 & \eta_1 d\rho_1+\eta_2 d\rho_2 & \frac{\partial b_3}{\partial\rho_1}d\rho_1+\frac{\partial b_3}{\partial\rho_2}d\rho_2+(r_1 d\rho_1+r_2 d\rho_2)\,a_3-(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)\,c_3\\ c_3 & \zeta_1 d\rho_1+\zeta_2 d\rho_2 & \frac{\partial c_3}{\partial\rho_1}d\rho_1+\frac{\partial c_3}{\partial\rho_2}d\rho_2+(p_1 d\rho_1+p_2 d\rho_2)\,b_3-(q_1 d\rho_1+q_2 d\rho_2)\,a_3\end{vmatrix}=0$$

qui caractérise les lignes de courbure.

Si l'on élimine au contraire $\frac{d\rho_2}{d\rho_1}$, on obtiendra l'équation aux rayons de courbure principaux :

$$\begin{vmatrix} a_3 & \frac{N}{R}\xi_1+\frac{\partial a_3}{\partial\rho_1}+q_1 c_3-r_1 b_3 & \frac{N}{R}\xi_2+\frac{\partial a_3}{\partial\rho_2}+q_2 c_3-r_2 b_3\\ b_3 & \frac{N}{R}\eta_1+\frac{\partial b_3}{\partial\rho_1}+r_1 a_3-p_1 c_3 & \frac{N}{R}\eta_2+\frac{\partial b_3}{\partial\rho_2}+r_2 a_3-p_2 c_3\\ c_3 & \frac{N}{R}\zeta_1+\frac{\partial c_3}{\partial\rho_1}+p_1 b_3-q_1 a_3 & \frac{N}{R}\zeta_2+\frac{\partial c_3}{\partial\rho_2}+p_2 b_3-q_2 a_3\end{vmatrix}=0.$$

Les équations analogues pour les surfaces $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const., s'obtiendront par permutation circulaire des indices.

II. — Corps rapporté avant déformation a des coordonnées rectangulaires.

37. *Formules cinématiques.*

On peut d'abord se proposer d'introduire les notions précédentes dans l'étude du système triple de surfaces qui, dans un corps déformé, correspond au système orthogonal de plans coordonnés auquel le corps est rapporté avant la déformation.

Conservons les notations du Chapitre I; dans le système triple du corps déformé, les variables désignées précédemment par ρ_1, ρ_2, ρ_3 seront x, y, z. L'origine du trièdre mobile adjoint à ce système triple sera au point P_1, dont les coordonnées par rapport aux axes fixes sont

$$x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w};$$

les axes rectangulaires des x', y', z' formés par le trièdre mobile seront définis par rapport aux axes rectangulaires des x, y, z par le tableau des cosinus :

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

Les formules (89) du n° 34 deviennent ici

$$(97)\quad \left\{\begin{array}{lll} 1 + \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1, & \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1, & \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1, \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = a\xi_2 + b\eta_2 + c\zeta_2, & 1 + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = a'\xi_2 + b'\eta_2 + c'\zeta_2, & \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = a''\xi_2 + b''\eta_2 + c''\zeta_2, \\ \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial z} = a\xi_3 + b\eta_3 + c\zeta_3, & \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} = a'\xi_3 + b'\eta_3 + c'\zeta_3, & 1 + \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = a''\xi_3 + b''\eta_3 + c''\zeta_3. \end{array}\right.$$

Rapportons le déplacement (u, v, w) au trièdre mobile; nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{u} &= a\mathrm{u}' + b\mathrm{v}' + c\mathrm{w}', \\ \mathrm{v} &= a'\mathrm{u}' + b'\mathrm{v}' + c'\mathrm{w}', \\ \mathrm{w} &= a''\mathrm{u}' + b''\mathrm{v}' + c''\mathrm{w}', \end{aligned}$$

u′, v′, w′ étant les projections de ce déplacement sur les axes mobiles.

Le point dont les coordonnées sont x, y, z par rapport aux axes fixes a ainsi pour coordonnées par rapport aux axes mobiles correspondants $-\mathrm{u}'$, $-\mathrm{v}'$, $-\mathrm{w}'$; nous devons donc identifier les trois expressions

$$a\,dx + a'\,dy + a''\,dz, \qquad b\,dx + b'\,dy + b''\,dz, \qquad c\,dx + c'\,dy + c''\,dz,$$

avec celles qu'on déduit des formules (B) où l'on remplace $\rho_1, \rho_2, \rho_3, x, y, z$ respectivement par $x, y, z, -\mathrm{u}', -\mathrm{v}', -\mathrm{w}'$. Il vient ainsi les relations

$$(98)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= a + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial x} + q_1\mathrm{w}' - r_1\mathrm{v}', & \xi_2 &= a' + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial y} + q_2\mathrm{w}' - r_2\mathrm{v}', & \xi_3 &= a'' + \frac{\partial \mathrm{u}'}{\partial z} + q_3\mathrm{w}' - r_3\mathrm{v}', \\ \eta_1 &= b + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial x} + r_1\mathrm{u}' - p_1\mathrm{w}', & \eta_2 &= b' + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial y} + r_2\mathrm{u}' - p_2\mathrm{w}', & \eta_3 &= b'' + \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial z} + r_3\mathrm{u}' - p_3\mathrm{w}', \\ \zeta_1 &= c + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial x} + p_1\mathrm{v}' - q_1\mathrm{u}', & \zeta_2 &= c' + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial y} + p_2\mathrm{v}' - q_2\mathrm{u}', & \zeta_3 &= c'' + \frac{\partial \mathrm{w}'}{\partial z} + p_3\mathrm{v}' - q_3\mathrm{u}', \end{aligned} \right.$$

que l'on pourrait aussi établir par un calcul direct.

Indiquons différentes particularisations du trièdre mobile qui se présentent dans les applications.

Comme première particularisation, prenons pour trièdre mobile le trièdre qui s'obtient en donnant au trièdre de sommet P_1 et dont les axes sont parallèles aux axes des x, y, z la *rotation au point* $\mathrm{P}(x, y, z)$ définie au n° 5. Les relations (12′) prennent ici, en vertu des formules (97), la forme simple suivante :

$$(99)\qquad \eta_3 = \zeta_2, \qquad \zeta_1 = \xi_3, \qquad \xi_2 = \eta_1.$$

Remarquons que ce choix particulier du trièdre mobile nous conduit à un calcul facile des équations aux dérivées partielles dont nous avons parlé aux nos 2 et 13; il suffit, en effet, d'adjoindre les relations (99) aux relations (96) et aux équations (A) pour former, par l'élimination des translations et des rotations, les équations cherchées.

Nous indiquerons deux autres particularisations importantes, utiles dans l'étude des tiges droites minces et des plaques minces.

Dans le premier cas, nous pouvons supposer que l'axe des z' du trièdre mobile est tangent à l'une des courbes coordonnées du système triple dans le corps déformé, ce qui donne, par exemple,

$$\xi_3 = 0, \qquad \eta_3 = 0.$$

Nous pouvons, pour l'autre cas, supposer que le plan des x', y' du trièdre mobile est tangent à l'une des surfaces du système triple dans le corps déformé, par exemple à la surface $z = \text{const}$. On a alors

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_2 = 0.$$

38. *Équations relatives à l'équilibre du corps déformé.*

Conservons aux six fonctions P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3 la signification que nous leur avons donnée aux n°s 15, 16 et 24, mais rapportons les forces extérieures aux axes mobiles et désignons par X', Y', Z', F', G', H' les quantités qui correspondent ainsi à X, Y, Z, F, G, H. En tenant compte des formules (97) du n° 37, (82), (83) et (84) du n° 33, et en posant

$$\begin{array}{lll} A_{x'} = P_1\xi_1 + U_3\xi_2 + U_2\xi_3, & B_{x'} = U_3\xi_1 + P_2\xi_2 + U_1\xi_3, & C_{x'} = U_2\xi_1 + U_1\xi_2 + P_3\xi_3, \\ A_{y'} = P_1\eta_1 + U_3\eta_2 + U_2\eta_3, & B_{y'} = U_3\eta_1 + P_2\eta_2 + U_1\eta_3, & C_{y'} = U_2\eta_1 + U_1\eta_2 + P_3\eta_3, \\ A_{z'} = P_1\zeta_1 + U_3\zeta_2 + U_2\zeta_3, & B_{z'} = U_3\zeta_1 + P_2\zeta_2 + U_1\zeta_3, & C_{z'} = U_2\zeta_1 + U_1\zeta_2 + P_3\zeta_3, \end{array}$$

nous trouvons que les équations (34) et (35) du n° 15 prennent la forme suivante :

$$(100)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial A_{x'}}{\partial x} + q_1 A_{z'} - r_1 A_{y'} + \dfrac{\partial B_{x'}}{\partial y} + q_2 B_{z'} - r_2 B_{y'} + \dfrac{\partial C_{x'}}{\partial z} + q_3 C_{z'} - r_3 C_{y'} + \rho X' = 0, \\ \dfrac{\partial A_{y'}}{\partial x} + r_1 A_{x'} - p_1 A_{z'} + \dfrac{\partial B_{y'}}{\partial y} + r_2 B_{x'} - p_2 B_{z'} + \dfrac{\partial C_{y'}}{\partial z} + r_3 C_{x'} - p_3 C_{z'} + \rho Y' = 0, \\ \dfrac{\partial A_{z'}}{\partial x} + p_1 A_{y'} - q_1 A_{x'} + \dfrac{\partial B_{z'}}{\partial y} + p_2 B_{y'} - q_2 B_{x'} + \dfrac{\partial C_{z'}}{\partial z} + p_3 C_{y'} - q_3 C_{x'} + \rho Z' = 0, \end{array} \right.$$

$$(101)\quad \left\{ \begin{array}{l} F' = l A_{x'} + m B_{x'} + n C_{x'}, \\ G' = l A_{y'} + m B_{y'} + n C_{y'}, \\ H' = l A_{z'} + m B_{z'} + n C_{z'}, \end{array} \right.$$

l, m, n sont les cosinus directeurs par rapport aux axes fixes de la normale extérieure à l'élément de surface $d\sigma$ du corps non déformé et $\rho X'$, $\rho Y'$, $\rho Z'$;

F′, G′, H′ sont les composantes sur les axes mobiles de la force appliquée, par unité de volume du corps non déformé, en un point intérieur du corps déformé, et de la force appliquée, par unité d'aire de la surface du corps non déformé, en un point de la surface du corps déformé. On remarquera que $A_{x'}$, $A_{y'}$, $A_{z'}$, par exemple, sont les projections sur les axes du trièdre mobile du segment dont les projections sur les axes fixes sont A_x, A_y, A_z.

Maintenant si ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont les composantes de la déformation au point (x, y, z) du corps non déformé, nous avons, en rapprochant les formules du n° 1 des formules (96) du n° 36

$$(102)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2-1}{2}, & \gamma_1 &= \xi_2\xi_3+\eta_2\eta_3+\zeta_2\zeta_3,\\ \varepsilon_2 &= \frac{\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2-1}{2}, & \gamma_2 &= \xi_3\xi_1+\eta_3\eta_1+\zeta_3\zeta_1,\\ \varepsilon_2 &= \frac{\xi_3^2+\eta_3^2+\zeta_3^2-1}{2}, & \gamma_3 &= \xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons donc exprimer l'énergie de déformation par unité de volume W en fonction des translations ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, …, et, par suite P_1, P_2, P_3, U_1, U_2, U_3 en fonctions des mêmes translations, au moyen des équations (59) du n° 24, savoir

$$(59)\quad P_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1},\quad P_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2},\quad P_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_3},\quad U_1 = \frac{\partial W}{\partial \gamma_1},\quad U_2 = \frac{\partial W}{\partial \gamma_2},\quad U_3 = \frac{\partial W}{\partial \gamma_3}.$$

Les équations (100), (101), (102) et (59), jointes aux équations fondamentales (A) du n° 36, nous fournissent un système d'équations auxquelles satisfont les translations ξ_1, ξ_2, … et les rotations p_1, p_2, … dont la connaissance est, comme on l'a vu, liée intimement à celle du système triple de surfaces suivant lesquelles les plans coordonnés rectangulaires primitifs se sont transformés.

Les formules du n° 37 conduiront, si on le désire, à des équations vérifiées par les déplacements u′, v′, w′ rapportés au trièdre mobile.

39. *Équations relatives à la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le trièdre mobile.*

Cherchons ce que donnent ici les considérations développées aux n°s 30 et suivants à l'égard de la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le trièdre mobile comme il a été indiqué au n° 37, de telle sorte que l'on ait

les relations (99). Les relations (98), jointes aux résultats obtenus au n° 11, et aux formules de Poisson déjà utilisées au n° 20, donnent alors immédiatement les développements suivants :

$$\begin{array}{lll}
\xi_1 = 1 + e_1 + \ldots, & \xi_2 = \frac{1}{2} g_3 + \ldots, & \xi_3 = \frac{1}{2} g_2 + \ldots, \\
\eta_1 = \frac{1}{2} g_3 + \ldots, & \eta_2 = 1 + e_2 + \ldots, & \eta_3 = \frac{1}{2} g_1 + \ldots, \\
\zeta_1 = \frac{1}{2} g_2 + \ldots, & \zeta_2 = \frac{1}{2} g_1 + \ldots, & \zeta_3 = 1 + e_3 + \ldots,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
p_1 = \dfrac{\partial \tau_1}{\partial x} + \ldots, & p_2 = \dfrac{\partial \tau_1}{\partial y} + \ldots, & p_3 = \dfrac{\partial \tau_1}{\partial z} + \ldots, \\
q_1 = \dfrac{\partial \tau_2}{\partial x} + \ldots, & q_2 = \dfrac{\partial \tau_2}{\partial y} + \ldots, & q_3 = \dfrac{\partial \tau_2}{\partial z} + \ldots, \\
r_1 = \dfrac{\partial \tau_3}{\partial x} + \ldots, & r_2 = \dfrac{\partial \tau_3}{\partial y} + \ldots, & r_3 = \dfrac{\partial \tau_3}{\partial z} + \ldots,
\end{array}$$

où e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 sont définis par les formules (18) du n° 9 et τ_1, τ_2, τ_3 par les formules du n° 11.

Si nous portons ces développements dans les équations (A) et si nous n'avons égard qu'à la première puissance de t, il vient, en outre des relations identiques telles que

$$\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial y \partial x},$$

les relations déjà obtenues au n° 13 et qui se mettent sous la forme (21).

Nous sommes donc ramenés au système rencontré dans l'une des démonstrations que M. Beltrami a données (n° 13) des équations (22) de Barré de Saint-Venant.

Les considérations précédentes, eu égard à la remarque du n° 37, confirment ce que nous avons dit au n° 13 à propos de l'application de la notion du système auxiliaire de M. Darboux.

En répétant pour le système des équations (100) et (101) ce que nous avons dit au n° 30 et en faisant pour l'état naturel l'hypothèse la plus simple, on trouve, dans le cas du corps isotrope, les équations suivantes :

$$(103)\quad \left\{\begin{array}{l}
(\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial e_1}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial e_2}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial e_3}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial g_2}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial g_3}{\partial y} + \rho \mathfrak{X} = 0, \\
\lambda \dfrac{\partial e_1}{\partial y} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial e_2}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial e_3}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial g_3}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial g_1}{\partial z} + \rho \mathfrak{Y} = 0, \\
\lambda \dfrac{\partial e_1}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial e_2}{\partial z} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial e_3}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial g_2}{\partial x} + \rho \mathfrak{Z} = 0.
\end{array}\right.$$

$$(104)\quad \begin{cases} \mathcal{F} = l[(\lambda+2\mu)e_1+\lambda e_2+\lambda e_3]+\mu(mg_3+ng_2), \\ \mathcal{G} = m[\lambda e_1+(\lambda+2\mu)e_2+\lambda e_3]+\mu(ng_1+lg_3), \\ \mathcal{H} = n[\lambda e_1+\lambda e_2+(\lambda+2\mu)e_3]+\mu(lg_2+mg_1), \end{cases}$$

qui résultent d'ailleurs aussi immédiatement du n° 32.

Quand les forces sont données à la surface, le problème de la déformation infiniment petite se trouve donc ramené à la recherche des solutions des systèmes (103) et (22) qui satisfont à la condition à la limite (104). Quand on aura trouvé ces solutions, le système des équations (18) déterminera les déplacements.

Nous retrouvons le procédé d'intégration utilisé par différents géomètres à l'exemple de M. Beltrami.

40. *Tiges droites minces; plaques minces.*

Ce serait peut-être le lieu ici, au moyen des particularisations dont nous avons parlé au n° 37, de considérer les résultats analogues aux précédents que l'on obtiendrait à l'égard des tiges droites minces et des plaques minces; mais nous préférons réserver la question pour un travail spécial.

III. — Corps rapporté avant déformation a un système triple quelconque de surfaces.

41. *Formules cinématiques.*

Plaçons-nous maintenant dans le cas plus général où le corps est rapporté avant déformation à un système triple quelconque de surfaces dont les paramètres sont ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Pour ne pas multiplier les notations, nous attribuerons à ce système triple les notations ($\xi_1, \ldots, p_1, \ldots$) précédemment adoptées pour le système triple du corps déformé, et pour ce dernier nous prendrons de nouvelles notations qui seront indiquées plus loin.

Nous considérerons donc un trièdre mobile dont le sommet est au point P, qui a pour coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes des x, y, z, et dont les axes ont, par rapport aux mêmes axes fixes, des cosinus directeurs définis par le Tableau

	x'	y'	
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

ξ_1, η_1, ζ_1 seront les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles relativement à ces axes, quand ρ_1 varie seule et joue le rôle du temps, ξ_2, η_2, ζ_2 les mêmes composantes quand ρ_2 varie seule, et ξ_3, η_3, ζ_3 les mêmes composantes quand ρ_3 varie seule. Nous aurons de même trois systèmes différents de rotations p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2; p_3, q_3, r_3 autour des axes mobiles des x', y', z'.

Les coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes de l'origine P du trièdre mobile sont des fonctions de ses coordonnées curvilignes ρ_1, ρ_2, ρ_3 qui vérifient d'après les formules (89) du n° 34, les relations

$$(105)\quad \begin{cases} dx = (a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1)d\rho_1 + (a\xi_2 + b\eta_2 + c\zeta_2)d\rho_2 + (a\xi_3 + b\eta_3 + c\zeta_3)\,d\rho_3, \\ dy = (a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1)d\rho_1 + (a'\xi_2 + b'\eta_2 + c'\zeta_2)d\rho_2 + (a'\xi_3 + b'\eta_3 + c'\zeta_3)\,d\rho_3, \\ dz = (a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1)d\rho_1 + (a''\xi_2 + b''\eta_2 + c''\zeta_2)d\rho_2 + (a''\xi_3 + b''\eta_3 + c''\zeta_3)\,d\rho_3, \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3 &= a\,dx + a'\,dy + a''\,dz, \\ \eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3 &= b\,dx + b'\,dy + b''\,dz, \\ \zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3 &= c\,dx + c'\,dy + c''\,dz. \end{aligned}$$

Soient u, v, w les projections sur les axes fixes du déplacement PP_1 du point P, et u', v', w' les projections du même déplacement sur les axes mobiles, en sorte que l'on ait

$$(106)\quad \begin{cases} \mathrm{u} = a\,\mathrm{u}' + b\,\mathrm{v}' + c\,\mathrm{w}', \\ \mathrm{v} = a'\,\mathrm{u}' + b'\,\mathrm{v}' + c'\,\mathrm{w}', \\ \mathrm{w} = a''\,\mathrm{u}' + b''\,\mathrm{v}' + c''\,\mathrm{w}'. \end{cases}$$

Considérons le carré de l'arc élémentaire décrit par le point P_1, savoir

$$(dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2,$$

ou encore, avec les notations du n° 1,

$$(107)\quad (1+2\varepsilon_1)\,dx^2 + (1+2\varepsilon_2)\,dy^2 + (1+2\varepsilon_3)\,dz^2 + 2\gamma_1\,dy\,dz + 2\gamma_2\,dz\,dx + 2\gamma_3\,dx\,dy.$$

Nous pouvons le calculer au moyen des formules (B) du n° 36; il nous suffit de remplacer, dans les trois expressions (B), les lettres x, y, z par les lettres u′, v′, w′, et de faire la somme des carrés, ce qui nous donne

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\xi_1 + \frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v'\right) d\rho_1 + \left(\xi_2 + \frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v'\right) d\rho_2 + \left(\xi_3 + \frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v'\right) d\rho_3\right]^2 \\ +&\left[\left(\eta_1 + \frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w'\right) d\rho_1 + \left(\eta_2 + \frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w'\right) d\rho_2 + \left(\eta_3 + \frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w'\right) d\rho_3\right]^2 \\ +&\left[\left(\zeta_1 + \frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u'\right) d\rho_1 + \left(\zeta_2 + \frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u'\right) d\rho_2 + \left(\zeta_3 + \frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u'\right) d\rho_3\right]^2. \end{aligned}\right.$$

Nous tirons de là la conclusion suivante :

Pour calculer les six composantes ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 *de la déformation au point* P, *on effectuera dans la forme quadratique* (108) *en* $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, *la substitution définie par la résolution des formules* (105); *on identifiera la nouvelle forme quadratique en* dx, dy, dz *ainsi obtenue avec la forme quadratique* (107).

On peut présenter la règle précédente sous une autre forme.

Prenons comme inconnues auxiliaires les composantes ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 de la déformation au point P par rapport aux axes des x', y', z' issus de ce point. D'après ce que nous avons dit au n° 7, dès que les six quantités ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 seront connues, nous aurons ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 par les formules

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon'_1 a^2 + \varepsilon'_2 b^2 + \varepsilon'_3 c^2 + \gamma'_1\, bc + \gamma'_2\, ca + \gamma'_3\, ab, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon'_1 a'^2 + \varepsilon'_2 b'^2 + \varepsilon'_3 c'^2 + \gamma'_1\, b'c' + \gamma'_2\, c'a' + \gamma'_3\, a'b', \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon'_1 a''^2 + \varepsilon'_2 b''^2 + \varepsilon'_3 c''^2 + \gamma'_1\, b''c'' + \gamma'_2\, c''a'' + \gamma'_3\, a''b''; \\ \gamma_1 &= 2\varepsilon'_1 a'a'' + 2\varepsilon'_2 b'b'' + 2\varepsilon'_3 c'c'' + \gamma'_1(b'c'' + b''c') + \gamma'_2(c'a'' + c''a') + \gamma'_3(a'b'' + a''b'), \\ \gamma_2 &= 2\varepsilon'_1 a''a + 2\varepsilon'_2 b''b + 2\varepsilon'_3 c''c + \gamma'_1(b''c + bc'') + \gamma'_2(c''a + ca'') + \gamma'_3(a''b + ab''), \\ \gamma_3 &= 2\varepsilon'_1 aa' + 2\varepsilon'_2 bb' + 2\varepsilon'_3 cc' + \gamma'_1(bc' + b'c) + \gamma'_2(ca' + c'a) + \gamma'_3(ab' + a'b). \end{aligned}\right.$$

D'autre part, d'après le même numéro, si l'on effectue sur la forme quadratique (107) la substitution définie par les formules

$$(110) \quad \begin{cases} dx = a\,dx' + b\,dy' + c\,dz', \\ dy = a'dx' + b'dy' + c'dz', \\ dz = a''dx' + b''dy' + c''dz', \end{cases}$$

on trouve la forme quadratique

$$(111) \quad \begin{cases} (1+2\varepsilon'_1)\,dx'^2 + (1+2\varepsilon'_2)\,dy'^2 + (1+2\varepsilon'_3)\,dz'^2 \\ \quad + 2\gamma'_1\,dy'\,dz' + 2\gamma'_2\,dz'\,dx' + 2\gamma'_3\,dx'\,dy'. \end{cases}$$

On a donc la règle suivante :

Pour calculer les six composantes ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 de la déformation au point P *par rapport aux axes* Px', Py', Pz', *on effectuera, dans la forme quadratique* (108) *en* $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, *la substitution définie par la résolution des formules*

$$(112) \quad \begin{cases} dx' = \xi_1\,d\rho_1 + \xi_2\,d\rho_2 + \xi_3\,d\rho_3, \\ dy' = \eta_1\,d\rho_1 + \eta_2\,d\rho_2 + \eta_3\,d\rho_3, \\ dz' = \zeta_1\,d\rho_1 + \zeta_2\,d\rho_2 + \zeta_3\,d\rho_3, \end{cases}$$

et l'on identifiera la nouvelle forme quadratique en dx', dy', dz' ainsi obtenue avec la forme quadratique (111).

42. *Déformation infiniment petite.*

Supposons, comme au n° 8, que u, v, w soient fonctions d'une variable t en même temps que de ρ_1, ρ_2, ρ_3, et puissent être développées suivant les puissances entières positives de t, par des séries absolument et uniformément convergentes dont les premiers termes soient u, v, w; les neuf cosinus a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' étant indépendants de t, u′, v′, w′ seront aussi développables par des séries dont les premiers termes u', v', w' seront liés à u, v, w par les relations

$$u = a u' + b v' + c w',$$
$$v = a' u' + b' v' + c' w',$$
$$w = a'' u' + b'' v' + c'' w'.$$

Si nous cherchons les premiers termes $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ des développements de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il suffira d'utiliser une des deux règles du numéro précédent; prenons la seconde; en désignant par $e'_1, e'_2, e'_3, g'_1, g'_2, g'_3$ les premiers termes des développements de $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, pour en déduire $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$, il suffira de remplacer, dans les formules (109),

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3,\quad \gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \gamma_3,\qquad \varepsilon'_1,\quad \varepsilon'_2,\quad \varepsilon'_3,\quad \gamma'_1,\quad \gamma'_2,\quad \gamma'_3,$$

respectivement par

$$e_1,\quad e_2,\quad e_3,\quad g_1,\quad g_2,\quad g_3,\qquad e'_1,\quad e'_2,\quad e'_3,\quad g'_1,\quad g'_2,\quad g'_3.$$

D'autre part, on aura la règle suivante :

Pour calculer les six quantités $e'_1, e'_2, e'_3, g'_1, g'_2, g'_3$, on effectuera, dans la forme quadratique en $d\rho_1, d\rho_2, d\rho_3$ suivante

$$\begin{aligned}
&(\xi_1\,d\rho_1+\xi_2\,d\rho_2+\xi_3\,d\rho_3)\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial\rho_1}+q_1w'-r_1v'\right)d\rho_1+\left(\frac{\partial u'}{\partial\rho_2}+q_2w'-r_2v'\right)d\rho_2+\left(\frac{\partial u'}{\partial\rho_3}+q_3w'-r_3v'\right)d\rho_3\right]\\
+&(\eta_1\,d\rho_1+\eta_2\,d\rho_2+\eta_3\,d\rho_3)\left[\left(\frac{\partial v'}{\partial\rho_1}+r_1u'-p_1w'\right)d\rho_1+\left(\frac{\partial v'}{\partial\rho_2}+r_2u'-p_2w'\right)d\rho_2+\left(\frac{\partial v'}{\partial\rho_3}+r_3u'-p_3w'\right)d\rho_3\right]\\
+&(\zeta_1\,d\rho_1+\zeta_2\,d\rho_2+\zeta_3\,d\rho_3)\left[\left(\frac{\partial w'}{\partial\rho_1}+p_1v'-q_1u'\right)d\rho_1+\left(\frac{\partial w'}{\partial\rho_2}+p_2v'-q_2u'\right)d\rho_2+\left(\frac{\partial w'}{\partial\rho_3}+p_3v'-q_3u'\right)d\rho_3\right]
\end{aligned}$$

la substitution définie par la résolution des formules (112), *et l'on identifiera la nouvelle forme quadratique en dx', dy', dz' ainsi obtenue avec la forme quadratique*

$$e'_1\,dx'^2+e'_2\,dy'^2+e'_3\,dz'^2+g'_1\,dy'\,dz'+g'_2\,dz'\,dx'+g'_3\,dx'\,dy'.$$

Désignant par J le déterminant

$$\mathrm{J}=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3\end{vmatrix},$$

dont le carré figure déjà au n° 35 dans l'expression de l'élément de volume, on obtient ainsi

$$
(113)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{J}e'_1 &= \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\dfrac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\dfrac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}e'_2 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \zeta_3
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}e'_3 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' \\
\xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' \\
\xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u'
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}g'_1 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' \\
\xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' \\
\xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w'
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
\xi_1 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \zeta_3
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}g'_2 &= \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\dfrac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\dfrac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' \\
\xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' \\
\xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v'
\end{vmatrix}, \\
\mathrm{J}g'_3 &= \begin{vmatrix}
\xi_1 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \zeta_3
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\dfrac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\dfrac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

La dilatation cubique

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3 = e'_1 + e \;\; + e'_3$$

sera donnée par la formule

$$J\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_1 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' \\ \xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' \\ \xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' \end{vmatrix},$$

que l'on peut encore écrire, en vertu des équations (A) du n° 36,

$$J\theta = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\begin{vmatrix} u' & \xi_2 & \xi_3 \\ v' & \eta_2 & \eta_3 \\ w' & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & u' & \xi_3 \\ \eta_1 & v' & \eta_3 \\ \zeta_1 & w' & \zeta_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & u' \\ \eta_1 & \eta_2 & v' \\ \zeta_1 & \zeta_2 & w' \end{vmatrix}.$$

43. *Équations relatives à l'équilibre du corps déformé.*

Revenons au cas de la déformation en général, et proposons-nous d'établir les équations relatives à l'équilibre du corps déformé par rapport au trièdre mobile du n° 41.

Prenons les équations (34) et (35) du n° 15; elles se résument dans l'équation

$$(32)\quad \iiint \rho(\mathrm{X}\,\delta\mathrm{u} + \mathrm{Y}\,\delta\mathrm{v} + \mathrm{Z}\,\delta\mathrm{w})\,dx\,dy\,dz + \iint (\mathrm{F}\,\delta\mathrm{u} + \mathrm{G}\,\delta\mathrm{v} + \mathrm{H}\,\delta\mathrm{w})\,d\sigma$$
$$- \iiint (\mathrm{P}_1\,\delta\varepsilon_1 + \mathrm{P}_2\,\delta\varepsilon_2 + \mathrm{P}_3\,\delta\varepsilon_3 + \mathrm{U}_1\,\delta\gamma_1 + \mathrm{U}_2\,\delta\gamma_2 + \mathrm{U}_3\,\delta\gamma_3)\,dx\,dy\,dz = 0,$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels $\delta\mathrm{u}$, $\delta\mathrm{v}$, $\delta\mathrm{w}$.

Il est facile de transformer cette équation (32); introduisons à la place des P_i, U_i six nouvelles auxiliaires P'_i, U'_i qui soient liées aux premières par

la substitution inverse de la substitution (109), en sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
P'_1 &= P_1 a^2 + P_2 a'^2 + P_3 a''^2 + 2U_1 a'a'' + 2U_2 a''a + 2U_3 aa', \\
P'_2 &= P_1 b^2 + P_2 b'^2 + P_3 b''^2 + 2U_1 b'b'' + 2U_2 b''b + 2U_3 bb', \\
P'_3 &= P_1 c^2 + P_2 c'^2 + P_3 c''^2 + 2U_1 c'c'' + 2U_2 c''c + 2U_3 cc', \\
U'_1 &= P_1 bc + P_2 b'c' + P_3 b''c'' + U_1(b'c'' + b''c') + U_2(b''c + bc'') + U_3(bc' + b'c), \\
U'_2 &= P_1 ca + P_2 c'a' + P_3 c''a'' + U_1(c'a'' + c''a') + U_2(c''a + ca'') + U_3(ca' + c'a), \\
U'_3 &= P_1 ab + P_2 a'b' + P_3 a''b'' + U_1(a'b'' + a''b') + U_2(a''b + ab'') + U_3(ab' + a'b),
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P'_1 a^2 + P'_2 b^2 + P'_3 c^2 + 2U'_1 bc + 2U'_2 ca + 2U'_3 ab, \\
P_2 &= P'_1 a'^2 + P'_2 b'^2 + P'_3 c'^2 + 2U'_1 b'c' + 2U'_2 c'a' + 2U'_3 a'b', \\
P_3 &= P'_1 a''^2 + P'_2 b''^2 + P'_3 c''^2 + 2U'_1 b''c'' + 2U'_2 c''a'' + 2U'_3 a''b'', \\
U_1 &= P'_1 a'a'' + P'_2 b'b'' + P'_3 c'c'' + U'_1(b'c'' + b''c') + U'_2(c'a'' + c''a') + U'_3(a'b'' + a''b'), \\
U_2 &= P'_1 a''a + P'_2 b''b + P'_3 c''c + U'_1(b''c + bc'') + U'_2(c''a + ca'') + U'_3(a''b + ab''), \\
U_3 &= P'_1 aa' + P'_2 bb' + P'_3 cc' + U'_1(bc' + b'c) + U'_2(ca' + c'a) + U'_3(ab' + a'b).
\end{aligned}
$$

On peut dire encore que les nouvelles auxiliaires sont liées aux premières de façon que la substitution (110) transforme la forme quadratique en dx, dy, dz,

$$P_1\,dx^2 + P_2\,dy^2 + P_3\,dz^2 + 2U_1\,dy\,dz + 2U_2\,dz\,dx + 2U_3\,dx\,dy,$$

dans la suivante en dx', dy', dz'

$$P'_1\,dx'^2 + P'_2\,dy'^2 + P'_3\,dz'^2 + 2U'_1\,dy'\,dz' + 2U'_2\,dz'\,dx' + 2U'_3\,dx'\,dy'.$$

Définissons les forces extérieures en les rapportant aux axes mobiles, et désignons par X', Y', Z', F', G', H' les quantités qui correspondent à X, Y, Z, F, G, H, en sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
X &= aX' + bY' + cZ', & F &= aF' + bG' + cH', \\
Y &= a'X' + b'Y' + c'Y', & G &= a'F' + b'G' + c'H', \\
Z &= a''X' + b''Y' + c''Z', & H &= a''F' + b''G' + c''H'.
\end{aligned}
$$

En vertu des formules (106) et (109), l'équation (32) prend alors la forme suivante

$$
\begin{aligned}
(115)\qquad & \iiint \rho(X'\delta u' + Y'\delta v' + Z'\delta w')\,dx\,dy\,dz \\
& + \iint (F'\delta u' + G'\delta v' + H'\delta w')\,d\sigma \\
& - \iiint (P'_1\delta\varepsilon'_1 + P'_2\delta\varepsilon'_2 + P'_3\delta\varepsilon'_3 + U'_1\delta\gamma'_1 + U'_2\delta\gamma'_2 + U'_3\delta\gamma'_3)\,dx\,dy\,dz = 0,
\end{aligned}
$$

que nous pouvons transformer en nous servant de la règle établie au n° 41 pour calculer ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3.

Par un calcul facile, analogue à celui qui a été fait au n° 15 [1], et en posant

$$
(116)\quad
\left\{
\begin{aligned}
A_{x'} &= P'_1 \left\{ 1 + \frac{1}{J}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix}
\right\}
+ \frac{U'_3}{J}
\begin{vmatrix}
\xi_1 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' & \zeta_3 \\
\xi_3 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' & \zeta_3
\end{vmatrix} \\
&\quad + \frac{U'_2}{J}
\begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' \\
\xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' \\
\xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v'
\end{vmatrix}, \\
A'_{y'} &= \frac{P'_1}{J}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix}
+ U'_3 \left\{ 1 + \frac{1}{J}
\begin{vmatrix}
\xi_1 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' & \zeta_3
\end{vmatrix}
\right\} \\
&\quad + \frac{U'_2}{J}
\begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' \\
\xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' \\
\xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w'
\end{vmatrix}, \\
A'_{z'} &= \frac{P'_1}{J}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \eta_1 & \zeta_1 \\
\frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \eta_2 & \zeta_2 \\
\frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \eta_3 & \zeta_3
\end{vmatrix}
+ \frac{U'_3}{J}
\begin{vmatrix}
\xi_1 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' & \zeta_1 \\
\xi_2 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' & \zeta_2 \\
\xi_3 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' & \zeta_3
\end{vmatrix} \\
&\quad + U'_2 \left\{ 1 + \frac{1}{J}
\begin{vmatrix}
\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' \\
\xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' \\
\xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u'
\end{vmatrix}
\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

---

[1] Dans les transformations d'intégrales de volume en intégrales de surface que comporte ce calcul, on n'aura qu'à appliquer la formule suivante :

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial \rho_i}\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3 = \iint \frac{l'\xi_i + m'\eta_i + n'\zeta_i}{|J|} f\, d\sigma$$

où f est une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2, ρ_3, et où les autres notations sont celles adoptées dans le texte. Cette formule, qu'on peut prévoir géométriquement, s'établit analytiquement en répétant le raisonnement employé par C. Neumann, dans le Mémoire cité au n° 26.

puis en formant six autres expressions analogues $B'_{x'}$, $B'_{y'}$, $B'_{z'}$, $C'_{x'}$, $C'_{y'}$, $C'_{z'}$, obtenues en remplaçant respectivement, dans les précédentes, P'_1, U'_3, U'_2 par U'_3, P'_2, U'_1 et par U'_2, U'_1, P'_3, on est conduit aux équations suivantes à l'intérieur du corps :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\rho_1}\begin{vmatrix} A'_{x'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{x'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{x'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + q_1 \begin{vmatrix} A'_{z'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{z'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{z'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} - r_1 \begin{vmatrix} A'_{y'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{y'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{y'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \frac{\partial}{\partial\rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{x'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{x'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{x'} & \zeta_3 \end{vmatrix} + q_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{z'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{z'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{z'} & \zeta_3 \end{vmatrix} - r_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{y'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{y'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{y'} & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \frac{\partial}{\partial\rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{x'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{x'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{x'} \end{vmatrix} + q_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{z'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{z'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C_{z'} \end{vmatrix} - r_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{y'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{y'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{y'} \end{vmatrix} + \rho J X' = 0, \\[2ex]
&\frac{\partial}{\partial\rho_1}\begin{vmatrix} A'_{y'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{y'} & \eta_2 & \xi_3 \\ C'_{y'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + r_1 \begin{vmatrix} A'_{x'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{x'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{x'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} A'_{z'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{z'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{z'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \frac{\partial}{\partial\rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{y'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{y'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{y'} & \zeta_3 \end{vmatrix} + r_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{x'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{x'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{x'} & \zeta_3 \end{vmatrix} - p_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{z'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{z'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{z'} & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \frac{\partial}{\partial\rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{y'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{y'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{y'} \end{vmatrix} + r_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{x'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{x'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{x'} \end{vmatrix} - p_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{z'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{z'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{z'} \end{vmatrix} + \rho J Y' = 0, \\[2ex]
&\frac{\partial}{\partial\rho_1}\begin{vmatrix} A'_{z'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{z'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{z'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} + p_1 \begin{vmatrix} A'_{y'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{y'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{y'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} - q_1 \begin{vmatrix} A'_{x'} & \xi_2 & \xi_3 \\ B'_{x'} & \eta_2 & \eta_3 \\ C'_{x'} & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \frac{\partial}{\partial\rho_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{z'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{z'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{z'} & \zeta_3 \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{y'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{y'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{y'} & \zeta_3 \end{vmatrix} - q_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & A'_{x'} & \xi_3 \\ \eta_1 & B'_{x'} & \eta_3 \\ \zeta_1 & C'_{x'} & \zeta_3 \end{vmatrix} \\
&+ \frac{\partial}{\partial\rho_3}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{z'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{z'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{z'} \end{vmatrix} + p_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{y'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{y'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{y'} \end{vmatrix} - q_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & A'_{x'} \\ \eta_1 & \eta_2 & B'_{x'} \\ \zeta_1 & \zeta_2 & C'_{x'} \end{vmatrix} + \rho J Z' = 0.
\end{aligned}
\right.
\tag{117}
$$

et aux équations suivantes à la surface du corps :

$$(118)\qquad \begin{cases} F' = l'A'_{x'} + m'B'_{x'} + n'C'_{x'}, \\ G' = l'A'_{y'} + m'B'_{y'} + n'C'_{y'}, \\ H' = l'A'_{z'} + m'B'_{z'} + n'C'_{z'}, \end{cases}$$

qui mettent en évidence la signification des auxiliaires $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$, ..., si l'on ajoute que l', m', n' sont les cosinus directeurs par rapport aux axes du trièdre mobile de la normale extérieure à l'élément $d\sigma$ du corps *non déformé*.

Désignons encore par la lettre W la fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ε'_1, ..., obtenue en remplaçant, dans $W(\varepsilon_i, \gamma_i)$, les lettres ε_i, γ_i par leurs valeurs (109); on a, d'après la définition des P'_i, U'_i,

$$(119)\quad P'_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_1}, \quad P'_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_2}, \quad P'_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_3}, \quad U'_1 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_1}, \quad U'_2 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_2}, \quad U'_3 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_3}.$$

44. *Équations relatives à la déformation infiniment petite.*

Si nous appliquons les résultats du numéro précédent au cas de la déformation infiniment petite, et si, pour fixer les idées, nous supposons que l'état naturel est celui considéré au n° 31, nous trouvons, en adoptant une notation analogue à celle de ce dernier numéro, que les équations (117) et (118) doivent être remplacées par des équations obtenues en substituant, dans les précédentes, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{T}'_3$, $\mathfrak{T}'_2$, $\mathfrak{T}'_3$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{T}'_1$, $\mathfrak{T}'_2$, $\mathfrak{T}'_1$, $\mathfrak{P}'_3$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ respectivement à $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$, $B'_{x'}$, $B'_{y'}$, $B'_{z'}$, $C'_{x'}$, $C'_{y'}$, $C'_{z'}$, X', Y', Z', F', G', H'; quant aux équations (119), elles doivent être remplacées par les suivantes :

$$\mathfrak{P}'_1 = \frac{\partial W_2}{\partial e'_1}, \quad \mathfrak{P}'_2 = \frac{\partial W_2}{\partial e'_2}, \quad \mathfrak{P}'_3 = \frac{\partial W_2}{\partial e'_3}, \quad \mathfrak{T}'_1 = \frac{\partial W_2}{\partial g'_1}, \quad \mathfrak{T}'_2 = \frac{\partial W_2}{\partial g'_2}, \quad \mathfrak{T}'_3 = \frac{\partial W_2}{\partial g'_3},$$

où nous conservons la lettre W_2 pour désigner ce que devient $W_2(e_i, g_i)$ lorsqu'on y remplace les e_i, g_i par leurs valeurs indiquées au n° 42 en fonction des e'_i, g'_i.

En particulier, si le corps est isotrope, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}'_1 &= \lambda\theta + 2\mu e'_1, & \mathfrak{T}'_1 &= \mu g'_1, \\ \mathfrak{P}'_2 &= \lambda\theta + 2\mu e'_2, & \mathfrak{T}'_2 &= \mu g'_2, \\ \mathfrak{P}'_3 &= \lambda\theta + 2\mu e'_3, & \mathfrak{T}'_3 &= \mu g'_3, \end{aligned}$$

IV. — Corps rapporté avant et après déformation à un système triple de surfaces.

45. *Formules cinématiques.*

On peut se proposer, comme dans le § II du présent Chapitre, d'introduire la considération du système triple de surfaces qui, dans le corps déformé, correspond au système triple de surfaces (ρ_1, ρ_2, ρ_3) auquel le corps est rapporté avant la déformation.

Désignons par (ξ'_1, ξ'_2, ..., p'_1, p'_2, ...) les translations et les rotations d'un trièdre mobile (T″) que nous adjoindrons à ce système triple du corps déformé, et dont les axes des x'', y'', z'' ont des directions définies, *par rapport aux axes des* x', y', z' *du trièdre mobile* (T′) *du système triple du corps avant déformation,* par le Tableau des cosinus

	x''	y''	z''
x'	a_1	b_1	c_1
y'	a'_1	b'_1	c'_1
z'	a''_1	b''_1	c''_1

L'origine du second trièdre mobile est placée au point dont les coordonnées par rapport au premier trièdre mobile sont u′, v′, w′, en sorte que les formules (B) du n° 36 nous donnent

$$(120)\quad \begin{cases} \xi_1 + \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_1} + q_1 w' - r_1 v' = a_1 \xi'_1 + b_1 \eta'_1 + c_1 \zeta'_1, \\ \xi_2 + \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_2} + q_2 w' - r_2 v' = a_1 \xi'_2 + b_1 \eta'_2 + c_1 \zeta'_2, \\ \xi_3 + \dfrac{\partial u'}{\partial \rho_3} + q_3 w' - r_3 v' = a_1 \xi'_3 + b_1 \eta'_3 + c_1 \zeta'_3, \\ \eta_1 + \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_1} + r_1 u' - p_1 w' = a'_1 \xi'_1 + b'_1 \eta'_1 + c'_1 \zeta'_1, \\ \eta_2 + \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_2} + r_2 u' - p_2 w' = a'_1 \xi'_2 + b'_1 \eta'_2 + c'_1 \zeta'_2, \\ \eta_3 + \dfrac{\partial v'}{\partial \rho_3} + r_3 u' - p_3 w' = a'_1 \xi'_3 + b'_1 \eta'_3 + c'_1 \zeta'_3, \\ \zeta_1 + \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_1} + p_1 v' - q_1 u' = a''_1 \xi'_1 + b''_1 \eta'_1 + c''_1 \zeta'_1, \\ \zeta_2 + \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_2} + p_2 v' - q_2 u' = a''_1 \xi'_2 + b''_1 \eta'_2 + c''_1 \zeta'_2, \\ \zeta_3 + \dfrac{\partial w'}{\partial \rho_3} + p_3 v' - q_3 u' = a''_1 \xi'_3 + b''_1 \eta'_3 + c''_1 \zeta'_3. \end{cases}$$

Rapportons le déplacement (u', v', w') au second trièdre mobile; nous aurons

$$\begin{aligned} u' &= a_1 u'' + b_1 v'' + c_1 w'', \\ v' &= a'_1 u'' + b'_1 v'' + c'_1 w'', \\ w' &= a''_1 u'' + b''_1 v'' + c''_1 w'', \end{aligned}$$

u'', v'', w'' étant les projections de ce déplacement sur les axes du second trièdre mobile.

L'origine du premier trièdre mobile a ainsi pour coordonnées, par rapport au second trièdre mobile, $-u''$, $-v''$, $-w''$; nous devons donc identifier les trois expressions

$$\begin{aligned} &a_1 (\xi_1 d\rho_1 + \xi_2 d\rho_2 + \xi_3 d\rho_3) + a'_1 (\eta_1 d\rho_1 + \eta_2 d\rho_2 + \eta_3 d\rho_3) + a''_1 (\zeta_1 d\rho_1 + \zeta_2 d\rho_2 + \zeta_3 d\rho_3), \\ &b_1 (\xi_1 d\rho_1 + \xi_2 d\rho_2 + \xi_3 d\rho_3) + b'_1 (\eta_1 d\rho_1 + \eta_2 d\rho_2 + \eta_3 d\rho_3) + b''_1 (\zeta_1 d\rho_1 + \zeta_2 d\rho_2 + \zeta_3 d\rho_3), \\ &c_1 (\xi_1 d\rho_1 + \xi_2 d\rho_2 + \xi_3 d\rho_3) + c'_1 (\eta_1 d\rho_1 + \eta_2 d\rho_2 + \eta_3 d\rho_3) + c''_1 (\zeta_1 d\rho_1 + \zeta_2 d\rho_2 + \zeta_3 d\rho_3), \end{aligned}$$

avec celles qu'on déduit des formules (B) où l'on remplace $(\xi_1, \xi_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots)$, (x, y, z) respectivement par $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, p'_1, p'_2, \ldots)$,

$(-\mathrm{u}'', -\mathrm{v}'', -\mathrm{w}'')$. Il vient ainsi les relations

$$
(121)\quad
\left|
\begin{aligned}
\xi'_1 &= a_1\xi_1 + a'_1\eta_1 + a''_1\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{u}''}{\partial \rho_1} + q'_1\mathrm{w}'' - r'_1\mathrm{v}'',\\
\eta'_1 &= b_1\xi_1 + b'_1\eta_1 + b''_1\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{v}''}{\partial \rho_1} + r'_1\mathrm{u}'' - p'_1\mathrm{w}'',\\
\zeta'_1 &= c_1\xi_1 + c'_1\eta_1 + c''_1\zeta_1 + \frac{\partial \mathrm{w}''}{\partial \rho_1} + p'_1\mathrm{v}'' - q'_1\mathrm{u}'',\\
\xi'_2 &= a_1\xi_2 + a'_1\eta_2 + a''_1\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{u}''}{\partial \rho_2} + q'_2\mathrm{w}'' - r'_2\mathrm{v}'',\\
\eta'_2 &= b_1\xi_2 + b'_1\eta_2 + b''_1\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{v}''}{\partial \rho_2} + r'_2\mathrm{u}'' - p'_2\mathrm{w}'',\\
\zeta'_2 &= c_1\xi_2 + c'_1\eta_2 + c''_1\zeta_2 + \frac{\partial \mathrm{w}''}{\partial \rho_2} + p'_2\mathrm{v}'' - q'_2\mathrm{u}'',\\
\xi'_3 &= a_1\xi_3 + a'_1\eta_3 + a''_1\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{u}''}{\partial \rho_3} + q'_3\mathrm{w}'' - r'_3\mathrm{v}'',\\
\eta'_3 &= b_1\xi_3 + b'_1\eta_3 + b''_1\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{v}''}{\partial \rho_3} + r'_3\mathrm{u}'' - p'_3\mathrm{w}'',\\
\zeta'_3 &= c_1\xi_3 + c'_1\eta_3 + c''_1\zeta_3 + \frac{\partial \mathrm{w}''}{\partial \rho_3} + p'_3\mathrm{v}'' - q'_3\mathrm{u}'',
\end{aligned}
\right.
$$

que l'on pourrait aussi établir par un calcul direct et auxquelles on peut adjoindre les suivantes

$$
(122)\quad
\left\{
\begin{aligned}
p'_1 &= a_1p_1 + a'_1q_1 + a''_1r_1 + \sum c_1\frac{\partial b_1}{\partial \rho_1} = a_1p_1 + a'_1q_1 + a''_1r_1 - \sum b_1\frac{\partial c_1}{\partial \rho_1},\\
q'_1 &= b_1p_1 + b'_1q_1 + b''_1r_1 + \sum a_1\frac{\partial c_1}{\partial \rho_1} = b_1p_1 + b'_1q_1 + b''_1r_1 - \sum c_1\frac{\partial a_1}{\partial \rho_1},\\
r'_1 &= c_1p_1 + c'_1q_1 + c''_1r_1 + \sum b_1\frac{\partial a_1}{\partial \rho_1} = c_1p_1 + c'_1q_1 + c''_1r_1 - \sum a_1\frac{\partial b_1}{\partial \rho_1},
\end{aligned}
\right.
$$

et les six analogues, ***si l'on suppose que le second trièdre mobile a même disposition que le premier.***

On peut particulariser le second trièdre mobile.

Si, par exemple, on suppose qu'il s'obtienne en faisant subir à un trièdre de même sommet, dont les axes sont parallèles aux axes des x', y', z', *la rotation au point* (ρ_1, ρ_2, ρ_3), les relations correspondant aux relations (12') et aux relations (99) sont les suivantes

$$
(123)\quad
\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta'_2 \\ & & {}' \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \zeta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \zeta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix} \zeta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \zeta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \zeta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi'_3 \end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \xi'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} \eta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}.
$$

On peut aussi, comme dans le n° 37, adopter les particularisations suivantes qui sont utiles dans l'étude des tiges courbes minces et des enveloppes minces.

Dans le premier cas, il est commode de prendre dans le corps non déformé

$$\xi_3 = 0, \qquad \eta_3 = 0,$$

et alors, on peut prendre aussi dans le corps déformé

$$\xi'_3 = 0, \qquad \eta'_3 = 0.$$

Dans le second cas, si l'on a pris dans le corps non déformé

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_2 = 0,$$

il est commode de prendre dans l'enveloppe déformée

$$\zeta'_1 = 0, \qquad \zeta'_2 = 0.$$

46. *Équations relatives à l'équilibre du corps déformé.*

Conservons aux six fonctions P'_1, P'_2, P'_3, U'_1, U'_2, U'_3 la signification que nous leur avons donnée au n° 43, mais rapportons les forces extérieures aux axes du second trièdre mobile, et désignons par X'', Y'', Z'', F'', G'', H'' les quantités qui correspondent ainsi à X', Y', Z', F', G', H'.

En tenant compte des formules du numéro précédent, nous trouvons qu'en posant

$$JA'_{x''} = P'_1 \begin{vmatrix} \xi'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \xi'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi'_3 \end{vmatrix},$$

$$JA'_{y''} = P'_1 \begin{vmatrix} \eta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \eta'_3 \end{vmatrix},$$

$$JA'_{z''} = P'_1 \begin{vmatrix} \zeta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \zeta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \zeta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \zeta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \zeta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} + U'_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta'_3 \end{vmatrix},$$

et en formant six autres expressions analogues $B'_{x''}$, $B'_{y''}$, $B'_{z''}$, $C'_{x''}$, $C'_{y''}$, $C_{z''}$, obtenues en remplaçant respectivement P'_1, U'_3, U'_2 par U'_3, P'_2, U'_1 et par

U'_2, U'_1, P'_3 on est conduit à des équations que l'on peut former en substituant $A'_{x''}$, $A'_{y''}$, $A'_{z''}$, $B'_{x''}$, ..., p'_1, q'_1, r'_1, p'_2, ..., X'', Y'', Z'', F'', G'', H'' respectivement à $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$, $B'_{x'}$, ..., p_1, q_1, r_1, p_2, ..., X', Y', Z', F', G', H' dans les équations (117) et (118) du n° 43. On remarquera que $A'_{x''}$, $A'_{y''}$, $A'_{z''}$, par exemple, sont les projections sur les axes du second trièdre mobile du segment dont les projections sur les axes du premier trièdre mobile sont $A'_{x'}$, $A'_{y'}$, $A'_{z'}$.

Maintenant, si ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 sont les composantes de la déformation au point (ρ_1, ρ_2, ρ_3) du corps, par rapport aux axes du premier trièdre mobile, le mode de raisonnement employé au n° 41, rapproché des formules (96), conduit à la règle suivante :

Pour calculer les six composantes ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 de la déformation au point P par rapport aux axes Px', Py', Pz' du premier trièdre mobile, on effectuera dans la forme quadratique

$$(\xi'_1\, d\rho_1 + \xi'_2\, d\rho_2 + \xi'_3\, d\rho_3)^2 + (\eta'_1\, d\rho_1 + \eta'_2\, d\rho_2 + \eta'_3\, d\rho_3)^2 + (\zeta'_1\, d\rho_1 + \zeta'_2\, d\rho_2 + \zeta'_3\, d\rho_3)^2,$$

en $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$, la substitution définie par la résolution des formules (112) *et l'on identifiera la nouvelle forme quadratique en dx', dy', dz' ainsi obtenue avec la forme quadratique* (111).

Pour parler autrement, on a les formules suivantes :

$$(114)\quad \left\{\begin{aligned}
&(1 + 2\varepsilon'_1)\xi_1^2 + (1 + 2\varepsilon'_2)\eta_1^2 + (1 + 2\varepsilon'_3)\zeta_1^2 \\
&\qquad + 2\gamma'_1\eta_1\zeta_1 + 2\gamma'_2\zeta_1\xi_1 + 2\gamma'_3\xi_1\eta_1 = \xi'^2_1 + \eta'^2_1 + \zeta'^2_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&(1 + 2\varepsilon'_1)\xi_1\xi_2 + (1 + 2\varepsilon'_2)\eta_1\eta_2 + (1 + 2\varepsilon'_3)\zeta_1\zeta_2 \\
&\quad + \gamma'_1(\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1) + \gamma'_2(\zeta_1\xi_2 + \zeta_2\xi_1) + \gamma'_3(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) = \xi'_1\xi'_2 + \eta'_1\eta'_2 + \zeta'_1\zeta'_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons donc exprimer l'énergie de déformation W par unité de volume en fonction des translations ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, ..., ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, η'_1, ..., et ensuite P'_1, P'_2, P'_3, U'_1, U'_2, U'_3 en fonction des mêmes translations, au moyen des équations (119) du n° 43, savoir :

$$(115)\quad P'_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_1},\quad P'_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_2},\quad P'_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'_3},\quad U'_1 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_1},\quad U'_2 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_2},\quad U'_3 = \frac{\partial W}{\partial \gamma'_3}.$$

Les équations obtenues comme il a été dit plus haut au moyen des équa-

tions (117) et (118) du n° 43, et les équations (119) et (124), jointes aux équations fondamentales (A) du n° 36 écrites pour les deux trièdres mobiles, nous fournissent un système d'équations auxquelles satisfont les translations ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ... et les rotations p'_1, p'_2, p'_3, ..., dont la connaissance est, comme on l'a vu, liée intimement à celle du système triple des surfaces suivant lesquelles les surfaces coordonnées primitives se sont transformées.

Les formules du n° 45 conduiront, si on le désire, à des équations vérifiées par les déplacements u″, v″, w″ rapportés au second trièdre mobile.

47. *Équations relatives à la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le second trièdre mobile.*

Cherchons ce que donnent ici les considérations développées aux n°s 30 et suivants à l'égard de la déformation infiniment petite lorsqu'on particularise le second trièdre mobile, comme il a été indiqué au n° 45, de telle sorte que l'on ait les relations (123).

Les relations (121) et (122), jointes aux résultats obtenus au n° 11, donnent alors immédiatement les développements suivants :

$$(125)\qquad \left\{\begin{aligned}
\xi'_1 &= \xi_1 + \eta_1\tau'_3 - \zeta_1\tau'_2 + \frac{\partial u'}{\partial\rho_1} + q_1 w' - r_1 v' + \ldots,\\
\eta'_1 &= \eta_1 + \zeta_1\tau'_1 - \xi_1\tau'_3 + \frac{\partial v'}{\partial\rho_1} + r_1 u' - p_1 w' + \ldots,\\
\zeta'_1 &= \zeta_1 + \xi_1\tau'_2 - \eta_1\tau'_1 + \frac{\partial w'}{\partial\rho_1} + p_1 v' - q_1 u' + \ldots,\\
\xi'_2 &= \xi_2 + \eta_2\tau'_3 - \zeta_2\tau'_2 + \frac{\partial u'}{\partial\rho_2} + q_2 w' - r_2 v' + \ldots,\\
\eta'_2 &= \eta_2 + \zeta_2\tau'_1 - \xi_2\tau'_3 + \frac{\partial v'}{\partial\rho_2} + r_2 u' - p_2 w' + \ldots,\\
\zeta'_2 &= \zeta_2 + \xi_2\tau'_2 - \eta_2\tau'_1 + \frac{\partial w'}{\partial\rho_2} + p_2 v' - q_2 u' + \ldots,\\
\xi'_3 &= \xi_3 + \eta_3\tau'_3 - \zeta_3\tau'_2 + \frac{\partial u'}{\partial\rho_3} + q_3 w' - r_3 v' + \ldots,\\
\eta'_3 &= \eta_3 + \zeta_3\tau'_1 - \xi_3\tau'_3 + \frac{\partial v'}{\partial\rho_3} + r_3 u' - p_3 w' + \ldots,\\
\zeta'_3 &= \zeta_3 + \xi_3\tau'_2 - \eta_3\tau'_1 + \frac{\partial w'}{\partial\rho_3} + p_3 v' - q_3 u' + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$(126)\quad \left\{\begin{aligned}
p'_1 &= p_1 + q_1\tau'_3 - r_1\tau'_2 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_1} + \ldots,\\
q'_1 &= q_1 + r_1\tau'_1 - p_1\tau'_3 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_1} + \ldots,\\
r'_1 &= r_1 + p_1\tau'_2 - q_1\tau'_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_1} + \ldots,\\
p'_2 &= p_2 + q_2\tau'_3 - r_2\tau'_2 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_2} + \ldots,\\
q'_2 &= q_2 + r_2\tau'_1 - p_2\tau'_3 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_2} + \ldots,\\
r'_2 &= r_2 + p_2\tau'_2 - q_2\tau'_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_2} + \ldots,\\
p'_3 &= p_3 + q_3\tau'_3 - r_3\tau'_2 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_3} + \ldots,\\
q'_3 &= q_3 + r_3\tau'_1 - p_3\tau'_3 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_3} + \ldots,\\
r'_3 &= r_3 + p_3\tau'_2 - q_3\tau'_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_3} + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

où τ'_1, τ'_2, τ'_3 désignent les projections sur les axes du premier trièdre mobile du segment qui aurait pour projections, sur les axes fixes, les quantités τ_1, τ_2, τ_3 du n° 11.

En portant les développements (125) dans les relations (123) et en n'ayant égard qu'à la première puissance de t, on obtient immédiatement les formules suivantes qui déterminent les valeurs des auxiliaires τ'_1, τ'_2, τ'_3:

$$(127)\quad\left\{\begin{aligned}
2J\tau'_1 &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial w'}{\partial\rho_1}+p_1v'-q_1u' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \dfrac{\partial w'}{\partial\rho_2}+p_2v'-q_2u' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \dfrac{\partial w'}{\partial\rho_3}+p_3v'-q_3u' & \zeta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial v'}{\partial\rho_1}+r_1u'-p_1w' \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial v'}{\partial\rho_2}+r_2u'-p_2w' \\ \xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial v'}{\partial\rho_3}+r_3u'-p_3w' \end{vmatrix}, \\
2J\tau'_2 &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial u'}{\partial\rho_1}+q_1w'-r_1v' \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial u'}{\partial\rho_2}+q_2w'-r_2v' \\ \xi_3 & \eta_3 & \dfrac{\partial u'}{\partial\rho_3}+q_3w'-r_3v' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial w'}{\partial\rho_1}+p_1v'-q_1u' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial w'}{\partial\rho_2}+p_2v'-q_2u' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dfrac{\partial w'}{\partial\rho_3}+p_3v'-q_3u' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \\
2J\tau'_3 &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v'}{\partial\rho_1}+r_1u'-p_1w' & \eta_1 & \zeta_1 \\ \dfrac{\partial v'}{\partial\rho_2}+r_2u'-p_2w' & \eta_2 & \zeta_2 \\ \dfrac{\partial v'}{\partial\rho_3}+r_3u'-p_3w' & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_1 & \dfrac{\partial u'}{\partial\rho_1}+q_1w'-r_1v' & \zeta_1 \\ \xi_2 & \dfrac{\partial u'}{\partial\rho_2}+q_2w'-r_2v' & \zeta_2 \\ \xi_3 & \dfrac{\partial u'}{\partial\rho_3}+q_3w'-r_3v' & \zeta_3 \end{vmatrix},
\end{aligned}\right.$$

et que l'on peut adjoindre aux formules (113) du n° 42.

En tenant compte des formules que nous venons d'écrire, on a les développements suivants :

$$\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 1+e'_1+\ldots,\qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \xi'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_3+\ldots,\qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_2+\ldots,$$

$$\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \eta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_3+\ldots,\qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 1+e'_2+\ldots,\qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \eta'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_1+\ldots,$$

$$\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \zeta'_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \zeta'_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \zeta'_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_2+\ldots,\qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \zeta'_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \zeta'_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \zeta'_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g'_1+\ldots,\qquad \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta'_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta'_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta'_3 \end{vmatrix} = 1+e'_3+\ldots,$$

d'où résulte que les développements (125) prennent la forme remarquable suivante :

(25)
$$
\left\{
\begin{aligned}
\xi'_1 &= (1 - e'_1)\xi_1 - \tfrac{1}{2}g_3\eta_1 - \tfrac{1}{2}g_2\zeta_1 - \ldots,\\
\xi'_2 &= (1 + e'_1)\xi_2 - \tfrac{1}{2}g_3\eta_2 - \tfrac{1}{2}g_2\zeta_2 - \ldots,\\
\xi'_3 &= (1 + e'_1)\xi_3 - \tfrac{1}{2}g_3\eta_3 - \tfrac{1}{2}g_2\zeta_3 - \ldots,\\
\eta'_1 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_1 - (1 - e_2)\eta_1 - \tfrac{1}{2}g_1\zeta_1 - \ldots,\\
\eta'_2 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_2 - (1 - e_2)\eta_2 - \tfrac{1}{2}g_1\zeta_2 - \ldots,\\
\eta'_3 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_3 - (1 - e_2)\eta_3 - \tfrac{1}{2}g_1\zeta_3 - \ldots,\\
\zeta'_1 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_1 + \tfrac{1}{2}g_1\eta_1 - (1 - e_3)\zeta_1 - \ldots,\\
\zeta'_2 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_2 - \tfrac{1}{2}g'_1\eta_2 - (1 - e_3)\zeta_2 - \ldots,\\
\zeta'_3 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_3 - \tfrac{1}{2}g_1\eta_3 - (1 - e_3)\zeta_3 - \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= e'_1\xi_1 - \tfrac{1}{2}g'_3\eta_1 - \tfrac{1}{2}g_2\zeta_1,\\
\varphi_2 &= e'_1\xi_2 - \tfrac{1}{2}g_3\eta_2 - \tfrac{1}{2}g_2\zeta_2,\\
\varphi_3 &= e'_1\xi_3 - \tfrac{1}{2}g'_3\eta_3 - \tfrac{1}{2}g_2\zeta_3,\\
\psi_1 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_1 - e'_2\eta_1 - \tfrac{1}{2}g_1\zeta_1,\\
\psi_2 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_2 - e_2\eta_2 - \tfrac{1}{2}g_1\zeta_2,\\
\psi_3 &= \tfrac{1}{2}g'_3\xi_3 - e_2\eta_3 - \tfrac{1}{2}g_1\zeta_3,\\
\chi_1 &= \tfrac{1}{2}g_2\xi_1 - \tfrac{1}{2}g'_1\eta_1 - e_3\zeta_1,\\
\chi_2 &= \tfrac{1}{2}g_2\xi_2 - \tfrac{1}{2}g'_1\eta_2 - e_3\zeta_2,\\
\chi_3 &= \tfrac{1}{2}g'_2\xi_3 - \tfrac{1}{2}g'_1\eta_3 - e_3\zeta_3,
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
\varphi'_1 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_3} - q_3\chi_2 - r_3\psi_2 - \frac{\partial\varphi_3}{\partial\rho_2} - q_2\chi_3 - r_2\psi_3,\\
\varphi'_2 &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial\rho_1} - q_1\chi_3 - r_1\psi_3 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_3} - q_3\chi_1 - r_3\psi_1,\\
\varphi'_3 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2} - q_2\chi_1 - r_2\psi_1 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_1} - q_1\chi_2 - r_1\psi_2,\\
\psi'_1 &= \frac{\partial\psi_2}{\partial\rho_3} - r_3\varphi_2 - p_3\chi_2 - \frac{\partial\psi_3}{\partial\rho_2} - r_2\varphi_3 - p_2\chi_3,\\
\psi'_2 &= \frac{\partial\psi_3}{\partial\rho_1} - r_1\varphi_3 - p_1\chi_3 - \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_3} - r_3\varphi_1 - p_3\chi_1,\\
\psi'_3 &= \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_2} - r_2\varphi_1 - p_2\chi_1 - \frac{\partial\psi_2}{\partial\rho_1} - r_1\varphi_2 - p_1\chi_2,\\
\chi'_1 &= \frac{\partial\chi_2}{\partial\rho_3} - p_3\psi_2 - q_3\varphi_2 - \frac{\partial\chi_3}{\partial\rho_2} - p_2\psi_3 - q_2\varphi_3,\\
\chi'_2 &= \frac{\partial\chi_3}{\partial\rho_1} - p_1\psi_3 - q_1\varphi_3 - \frac{\partial\chi_1}{\partial\rho_3} - p_3\psi_1 - q_3\varphi_1,\\
\chi'_3 &= \frac{\partial\chi_1}{\partial\rho_2} - p_2\psi_1 - q_2\varphi_1 - \frac{\partial\chi_2}{\partial\rho_1} - p_1\psi_2 - q_1\varphi_2
\end{aligned}
$$

puis encore

$$
\begin{aligned}
2J\varphi''_1 &= \varphi'_2\xi_2 + \psi'_2\eta_2 + \chi'_2\zeta_2 + \varphi'_3\xi_3 + \psi'_3\eta_3 + \chi'_3\zeta_3 - \varphi'_1\xi_1 - \psi'_1\eta_1 - \chi'_1\zeta_1,\\
J\varphi''_2 &= \varphi'_2\xi_1 + \psi'_2\eta_1 + \chi'_2\zeta_1,\\
J\varphi''_3 &= \varphi'_3\xi_1 + \psi'_3\eta_1 + \chi'_3\zeta_1,\\
J\psi''_1 &= \varphi'_1\xi_2 + \psi'_1\eta_2 + \chi'_1\zeta_2,\\
2J\psi''_2 &= \varphi'_3\xi_3 + \psi'_3\eta_3 + \chi'_3\zeta_3 + \varphi'_1\xi_1 + \psi'_1\eta_1 + \chi'_1\zeta_1 - \varphi'_2\xi_2 - \psi'_2\eta_2 - \chi'_2\eta_2,\\
J\psi''_3 &= \varphi'_3\xi_2 + \psi'_3\eta_2 + \chi'_3\zeta_2,\\
J\chi''_1 &= \varphi'_1\xi_3 + \psi'_1\eta_3 + \chi'_1\zeta_3,\\
J\chi''_2 &= \varphi'_2\xi_3 + \psi'_2\eta_3 + \chi'_2\zeta_3,\\
2J\chi''_3 &= \varphi'_1\xi_1 + \psi'_1\eta_1 + \chi'_1\zeta_1 + \varphi'_2\xi_2 + \psi'_2\eta_2 + \chi'_2\zeta_2 - \varphi'_3\xi_3 - \psi'_3\eta_3 - \chi'_3\zeta_3,
\end{aligned}
$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
\xi''_1 &= \xi_2\varphi''_2 + \xi_3\varphi''_3 - \xi_1\varphi''_1, & \xi''_2 &= \xi_3\psi''_3 + \xi_1\psi''_1 - \xi_2\psi''_2, & \xi''_3 &= \xi_1\chi''_1 + \xi_2\chi''_2 - \xi_3\chi''_3,\\
\eta''_1 &= \eta_2\varphi''_2 + \eta_3\varphi''_3 - \eta_1\varphi''_1, & \eta''_2 &= \eta_3\psi''_3 + \eta_1\psi''_1 - \eta_2\psi''_2, & \eta''_3 &= \eta_1\chi''_1 + \eta_2\chi''_2 - \eta_3\chi''_3,\\
\zeta''_1 &= \zeta_2\varphi''_2 + \zeta_3\varphi''_3 - \zeta_1\varphi''_1, & \zeta''_2 &= \zeta_3\psi''_3 + \zeta_1\psi''_1 - \zeta_2\psi''_2, & \zeta''_3 &= \zeta_1\chi''_1 + \zeta_2\chi''_2 - \zeta_3\chi''_3.
\end{aligned}
$$

Si nous portons les développements (126) et (128) dans les équations (A) écrites pour les translations ξ'_1, ... et les rotations p'_1, ..., et si nous n'avons égard qu'à la première puissance de t, il vient, en outre des relations identiques telles que

$$\frac{\partial^2\tau'_1}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = \frac{\partial^2\tau'_1}{\partial\rho_2\,\partial\rho_1},$$

neuf relations qui sont linéaires par rapport aux neuf quantités telles que

$$\frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_1} + q_1\tau'_3 - r_1\tau'_2$$

et qui, résolues par rapport à ces quantités, prennent la forme suivante

$$
\begin{aligned}
\xi''_1 + \frac{\partial\tau'_1}{\partial\rho_1} + q_1\tau'_3 - r_1\tau'_2 &= 0,\\
\eta''_1 + \frac{\partial\tau'_2}{\partial\rho_1} + r_1\tau'_1 - p_1\tau'_3 &= 0,\\
\zeta''_1 + \frac{\partial\tau'_3}{\partial\rho_1} + p_1\tau'_2 - q_1\tau'_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

$$\xi_2'' + \frac{\partial \tau_1'}{\partial \rho_2} + q_2 \tau_3' - r_2 \tau_2' = 0,$$

$$\eta_2'' + \frac{\partial \tau_2'}{\partial \rho_2} + r_2 \tau_1' - p_2 \tau_3' = 0,$$

$$\zeta_2'' + \frac{\partial \tau_3'}{\partial \rho_2} + p_2 \tau_2' - q_2 \tau_1' = 0,$$

$$\xi_3'' + \frac{\partial \tau_1'}{\partial \rho_3} + q_3 \tau_3' - r_3 \tau_2' = 0,$$

$$\eta_3'' + \frac{\partial \tau_2'}{\partial \rho_3} + r_3 \tau_1' - p_3 \tau_3' = 0,$$

$$\zeta_3'' + \frac{\partial \tau_3'}{\partial \rho_3} + p_3 \tau_2' - q_3 \tau_1' = 0,$$

qui met en évidence un nouveau trièdre mobile dont les axes sont constamment parallèles à ceux du premier trièdre mobile, dont les translations sont ξ_1'', η_1'', ζ_1'', ξ_2'', ... et tel que le point dont les coordonnées sont τ_1', τ_2', τ_3' est un point fixe de l'espace.

Nous avons donc neuf équations aux dérivées partielles entre e_1', e_2', e_3', g_1', g_2', g_3' que l'on obtient en remplaçant dans les équations de droite de (A), ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, ... par ξ_1'', η_1'', ζ_1'', ξ_2'', ... Ces neuf équations se réduisent à six relations qui sont entièrement analogues aux équations de Barré de Saint-Venant données au n° 13.

On pourrait répéter ici ce que nous avons dit à la fin du n° 39 en ce qui concerne l'intégration des équations relatives à la déformation infiniment petite.

48. *Tiges courbes minces; enveloppes minces.*

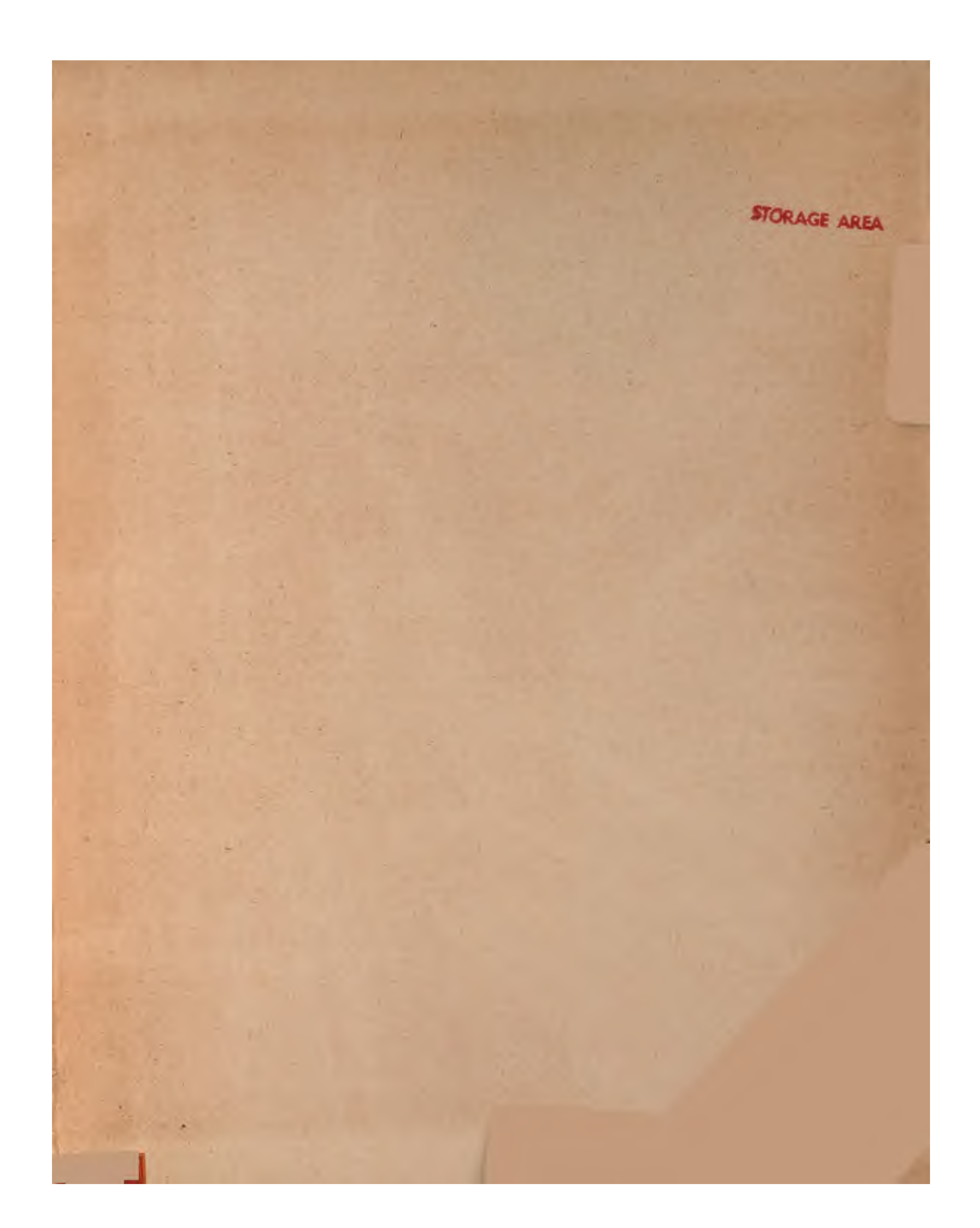
Nous pourrions, au moyen des particularisations dont nous avons parlé au n° 45, considérer les résultats analogues aux précédents que l'on obtiendrait à l'égard des tiges courbes minces et des enveloppes minces; mais, comme nous l'avons déjà dit au n° 40, nous réserverons cette question pour un Mémoire spécial.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DIXIÈME.

FIN DU TOME DIXIÈME.

23102 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.


STORAGE AREA

